# Übungsblatt Nr. 2, Besprechung am 8.9.2015

Bitte das Übungsblatt möglichst ausgedruckt in die Übung mitbringen.

## Aufgabe 1: Deutsch → Formel, Formel → Deutsch

Gegeben seien folgende deutsche Sätze:

1. "Person x, die keinen anderweitigen Anspruch auf Absicherung im Krankheitsfall hat und zuletzt gesetzlich krankenversichert war, ist versicherungspflichtig."
2. "Wenn man nachts ohne Licht fährt, sieht man nichts; es sei denn, es ist Vollmond."

Schreiben Sie die Sätze jeweils formal als Implikation auf (kürzen Sie Teile davon ab als $A$, $B$, $C$ usw.), und bilden Sie die formale Verneinung bzw. Kontraposition. Wie formuliert man die Verneinung bzw. Kontraposition wieder als deutschen Satz?

**Beispiel 1:** Der Satz "Wenn es regnet oder der Gulli überläuft, wird die Straße nass." ist formalisierbar als $(A \vee B) \Rightarrow C$. Die Verneinung ist $\neg((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B)) \wedge \neg C \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg C$ und bedeutet "Es regnet oder der Gulli läuft über, und die Straße bleibt trocken." Die Kontraposition ist $(\neg C \Rightarrow \neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B))$ und bedeutet "Wenn die Straße trocken bleibt, dann regnet es nicht, und auch der Gulli läuft nicht über."

## Aufgabe 2: Rechnen mit Aussagenformeln.

Seien $A$ und $B$ Aussagen. Formulieren Sie die folgenden Aussagen um in dazu äquivalente Aussagen, die nur mit den Zeichen $\wedge, \vee$ und $\neg$ auskommen. Verwenden Sie dafür die Logikregeln aus der Vorlesung.

1. $(A \Leftarrow B) \wedge B$
2. $\neg(A \vee (A \Leftrightarrow B))$
3. $(A \Rightarrow B) \wedge \neg(B \Rightarrow A)$
4. $A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A \vee B)$

Wie lauten die Verneinungen dieser Aussagen?

## Aufgabe 3: Beispiele für Beweisverfahren.

Welches Beweisverfahren wird in den folgenden Beweisen benutzt?
(Bem.: Das Zeichen $a \mid b$ heißt "$a$ teilt $b$")
Vergleichen Sie die Beweise miteinander: Einmal rein äußerlich, andererseits auch inhaltlich: Wo wird direkt, wo indirekt argumentiert? (Wenn Sie nicht alles inhaltlich verstehen, ist das nicht so schlimm. Sie sollen hier nur Beispiele sehen, wie man logische Argumentationen "mathematisch" richtig aufschreiben kann.)

**Satz 1:** Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch $3$ teilbar.
**Beweis:** Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, etwa $n$, $n+1$, $n+2$, ist $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3\cdot(n+1)$, also durch drei teilbar. $\square$

**Satz 2:** Vor.: $a, b, c$ seien aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
Beh.: $3 \mid a+b+c$.
**Bew.:** Laut Vor. ist $b = a+1$ und $c = b+1 = (a+1)+1 = a+2$. Dann gilt: $a+b+c = a+(a+1)+(a+2) = 3a+3 = 3\cdot(a+1) \Rightarrow 3 \mid a+b+c$. $\square$

**Satz 3:** Es gibt unendlich viele Primzahlen.
**Beweis:** Angenommen, es gäbe nur die endlich vielen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$. Dann ist die natürliche Zahl $n := p_1 \cdot p_2 \cdots p_r + 1$ durch keine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ teilbar. Da aber jede natürliche Zahl $> 1$ durch eine Primzahl (etwa der kleinste Teiler von $n$, der $> 1$ ist, vgl. Satz 4) teilbar sein muss, existiert noch eine weitere Primzahl, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

**Satz 4:** Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist durch eine Primzahl teilbar.
**Bew.:** Sei $p$ der kleinste Teiler $> 1$, der $n$ teilt. Dann ist $p$ prim, denn wäre $p$ zusammengesetzt aus zwei Faktoren $a, b > 1$, so wäre $a > 1$ ein Teiler von $n$, der kleiner ist als $p$, im Widerspruch zur Wahl von $p$. Also ist $p$ prim. $\square$

**Satz 5:** Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Dann ist $\mathbb{P}$ unendlich groß.
**Bew.:** Ann.: $\mathbb{P} = \{p_1, \ldots, p_r\}$.
Betrachte $n := p_1 \cdots p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \ldots,\ p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$, und es gilt $p \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$, Widerspruch. $\square$
Bem.: Die Behauptung in Satz 4 ist auch als $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ p \in \mathbb{P} : p \mid n$ schreibbar.

**Satz 6:** Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Dann ist $\mathbb{P}$ unendlich groß.
**Bew.:** Wir konstruieren eine unendlich große Menge von Primzahlen wie folgt: Sei $p_1$ eine Primzahl, etwa $p_1 := 2$. Sind Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ gegeben, betrachte man $n := p_1 \cdots p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \ldots,\ p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$, und es gilt $p \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$, setze dann $p_{r+1} := p$. Auf diese Weise können unendlich viele Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ konstruiert werden. $\square$