Vorkurs Mathematik, PD Dr. K. Halupczok,
WWU Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik 10.9.2015

Übungsblatt Nr. 4, Besprechung am 15.9.2015

Aufgabe 1: Vollständige Induktion.

Zeigen Sie die folgenden Sätze mit vollständiger Induktion:

$$(a) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

$$(b) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}: \ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Aufgabe 2: Noch mehr vollständige Induktion.

Zeigen Sie:

(a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist $3n^2 > (n+1)^2$.

(b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist $3^n > n^2$.

(c) Zeigen Sie, dass für $n \geq 4$ die Ungleichung $n! > n^2$ gilt.

Aufgabe 3: Formulierung eines Beweises

Sei n eine natürliche Zahl größer als 1.

Zeigen Sie: Ist $n^2 + 2$ eine Primzahl, dann ist n durch 3 teilbar.

(Hinweis: Verwenden Sie im Beweis, dass eine Zahl $n > 1$, die nicht durch 3 teilbar ist, von der Form $n = 3k + 1$ oder $n = 3k - 1$ ist mit einem $k \geq 1$.)

Aufgabe 4: Schriftlicher Beweis

Bei dieser Übungsaufgabe können Sie Ihre Lösung freiwillig bei Ihrer Übungsleitung schriftlich abgeben am Dienstag, den 15.9., und korrigieren lassen. Sie können Ihre Lösung auch in kleinen Teams (2-5 Personen) erarbeiten und zusammen abgeben. Die Korrektur erhalten Sie in der Übung am 17.9., wo Sie die Aufgabe besprechen können.

Zeigen Sie, dass die Formel

$$1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + 3 \cdot (3!) + \cdots + n \cdot (n!) = (n+1)! - 1$$

für alle $n \geq 1$ gültig ist.