Übungsblatt Nr. 5, Besprechung am 17.9.2015

Aufgabe 1: Logik der Definition eines teilerfremden Zahlenpaares.

(a) Im Skript wurde durch die Aussage

$$\forall\, c \in \mathbb{N}:\ c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c = 1$$

definiert, dass zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ *teilerfremd* sind. Wie kann man diese Aussage rein sprachlich ausdrücken? Schreiben Sie die formale Verneinung der Aussage auf und drücken Sie diese ebenfalls sprachlich aus.

Denken Sie daran, dass "$c \mid a$" und "$c \mid b$" ebenfalls Abkürzungen für Aussagen sind; diese enthalten einen Existenzquantor. Wenn man diese Aussagen dann in die Definition einsetzt, wie lautet dann die formale Verneinung und ihre sprachliche Umsetzung?

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Zahlen $n! + 1$ und $(n+1)! + 1$ teilerfremd.

Aufgabe 2: Supremum, Maximum und obere Schranken.

Bestimmen Sie das Supremum und Maximum der folgenden Mengen reeller Zahlen, falls existent, und geben Sie jeweils die Menge aller oberer Schranken an:

$$A := \{e, 1\}, \qquad D := \{2n;\ n \in \mathbb{N}\},$$

$$B := \left\{2 - \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad E := \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 2\},$$

$$C := \left\{\frac{n}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad F := \{x \in \mathbb{Q};\ (x+1)^2 = 3\}.$$

Aufgabe 3: Vereinigung reeller Intervalle.

Schreiben Sie die folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von Intervallen und beweisen Sie Ihre Behauptung:

$$A := \{x \in \mathbb{R};\ |x| < 2\},$$
$$B := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |x| \leq 3\},$$
$$C := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |2x - 3| \geq 0.5\},$$
$$D := \{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R};\ |x - 2| \leq 3\},$$
$$E := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ (x-1)^2 \geq 2\}.$$