

Übungsblatt Nr. 6, Besprechung am 22.9.2015

Aufgabe 1: Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen.

Bestimmen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

$$\begin{aligned} a : \{1, 2, 3, 4\} &\rightarrow \{1, 2, 3\}, & a(1) &= 1, & a(2) &= 3, & a(3) &= 3, & a(4) &= 2 \\ b : \{1, 2, 3, 4\} &\rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, & b(1) &= 1, & b(2) &= 3, & b(3) &= 3, & b(4) &= 2 \\ c : \{1, 2, 3, 4\} &\rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, & c(1) &= 1, & c(2) &= 3, & c(3) &= 4, & c(4) &= 2 \\ d : \{1, 2, 3, 4\} &\rightarrow \{1, 2\}, & d(1) &= 1, & d(2) &= 1, & d(3) &= 2, & d(4) &= 1 \\ e : \{1\} &\rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}, & e(1) &= 5 \end{aligned}$$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 2n$$

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(1) = 1 \text{ und } g(n) = n - 1 \text{ für } n > 1$$

$$h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, h(n) = n - 1, \text{ für gerades } n \text{ und } h(n) = n + 1, \text{ für ungerades } n$$

Aufgabe 2: Summenzeichen, Teleskopprinzip und Indexverschiebung

(a) Berechnen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\sum_{k=1}^{10} (k^7 - k^5 + k) + \sum_{k=21}^{30} ((k - 20)^5 - (k - 20)^7)$$

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln(n + 1).$$

$$\text{Tipp: } \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k).$$

Aufgabe 3: Konvergenz reeller Folgen.

Untersuchen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren. Falls ja, geben Sie den Grenzwert an.

$$a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{1-n^3} & \text{für } n \in \{163, 164, \dots, 163163\}, \\ 100 & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$c_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n, \quad d_n = \left(-\frac{4}{5}\right)^n.$$

Wie lautet die Menge der oberen Schranken der Mengen $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$ und $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$?