Vorkurs Mathematik 2015

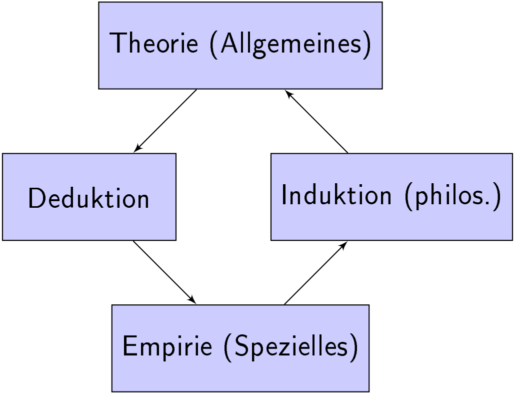
WWU Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik

PD Dr. K. Halupczok

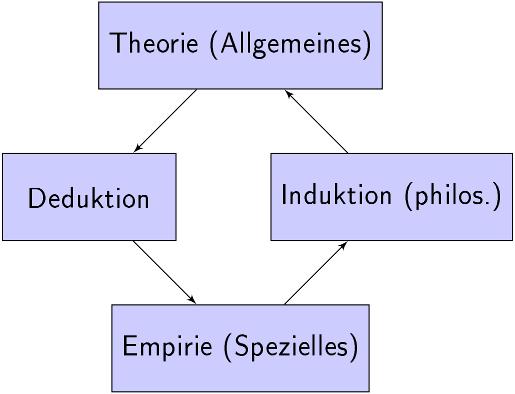
Skript VK0 vom 1.9.2015

VK0: Einführung

Denkanstoß: Was ist wissenschaftliches Denken?



Denkanstoß: Was ist wissenschaftliches Denken?



Theorie: Entwirft ein Bild eines Ausschnitts der Wirklichkeit, um diesen Teil der Wirklichkeit zu erklären.

Empirie: Die Sammlung/Erhebung von Informationen/Daten der Wirklichkeit, die beobachtet werden können in gezielten, systematischen Untersuchungen.

Empirie: Die Sammlung/Erhebung von Informationen/Daten der Wirklichkeit, die beobachtet werden können in gezielten, systematischen Untersuchungen.

Deduktion: Schluss vom Allgemeinen auf das Besondere, d. h. Schlussfolgerung von gegebenen Prämissen auf logisch zwingende Konsequenzen, inklusive der formalen Ableitung von Ergebnissen (bzw. Herleitung) aus einer Theorie.

Empirie: Die Sammlung/Erhebung von Informationen/Daten der Wirklichkeit, die beobachtet werden können in gezielten, systematischen Untersuchungen.

Deduktion: Schluss vom Allgemeinen auf das Besondere, d. h. Schlussfolgerung von gegebenen Prämissen auf logisch zwingende Konsequenzen, inklusive der formalen Ableitung von Ergebnissen (bzw. Herleitung) aus einer Theorie.

Induktion (philosophisch): Gewinnung von allgemeinen Erkenntnissen aus speziellen.

Empirie: Die Sammlung/Erhebung von Informationen/Daten der Wirklichkeit, die beobachtet werden können in gezielten, systematischen Untersuchungen.

Deduktion: Schluss vom Allgemeinen auf das Besondere, d. h. Schlussfolgerung von gegebenen Prämissen auf logisch zwingende Konsequenzen, inklusive der formalen Ableitung von Ergebnissen (bzw. Herleitung) aus einer Theorie.

Induktion (philosophisch): Gewinnung von allgemeinen Erkenntnissen aus speziellen.

Die Mathematik gehört zu den nicht-empirischen Wissenschaften. Sie benutzt sowohl deduktive als auch induktive Methoden.

Was ist Mathematik?

Mathematik ist eine Wissenschaft, die durch logische Definitionen selbstgeschaffene abstrakte Strukturen mittels der Logik auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht. (Wikipedia)

Was ist Mathematik?

Mathematik ist eine Wissenschaft, die durch logische Definitionen selbstgeschaffene abstrakte Strukturen mittels der Logik auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht. (Wikipedia)

Seit dem 19. Jahrhundert bemüht man sich, die Mathematik und ihre Teilgebiete durch einen streng logischen strukturellen Aufbau zu erfassen.

Was ist Mathematik?

Mathematik ist eine Wissenschaft, die durch logische Definitionen selbstgeschaffene abstrakte Strukturen mittels der Logik auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht. (Wikipedia)

Seit dem 19. Jahrhundert bemüht man sich, die Mathematik und ihre Teilgebiete durch einen streng logischen strukturellen Aufbau zu erfassen.

Man beginnt dabei mit einigen wenigen grundlegenden widerspruchsfreien Aussagen, welche als wahr angesehen werden, den sogenannten Axiomen, und leitet daraus durch logische Schlussfolgerungen weitere wahre Aussagen her, die man Sätze nennt. Die lückenlose und korrekte Herleitung eines Satzes nennt man Beweis.

Axiomatische Grundlage der Mathematik

Wie Aussagen aus einem begrenzten Vorrat von Definitionen, Postulaten und Axiomen hergeleitet und bewiesen werden, zeigte zuerst Euklid um das 3. Jh. v. Chr. mit seinen "Elementen". Das Werk zeigt erstmals musterhaft den Aufbau einer exakten Wissenschaft. Es beeinflusste auch andere Wissenschaften.

Axiomatische Grundlage der Mathematik

Wie Aussagen aus einem begrenzten Vorrat von Definitionen, Postulaten und Axiomen hergeleitet und bewiesen werden, zeigte zuerst Euklid um das 3. Jh. v. Chr. mit seinen “Elementen”. Das Werk zeigt erstmals musterhaft den Aufbau einer exakten Wissenschaft. Es beeinflusste auch andere Wissenschaften.

Heutzutage nimmt man üblicherweise die Zermelo–Fränkel-Mengenlehre inklusive dem sogenannten Auswahlaxiom als axiomatische Grundlage für fast alle Zweige der Mathematik. (Abgekürzt mit ZFC, wobei C für choice, d.h. Auswahl steht).

Axiomatische Grundlage der Mathematik

Wie Aussagen aus einem begrenzten Vorrat von Definitionen, Postulaten und Axiomen hergeleitet und bewiesen werden, zeigte zuerst Euklid um das 3. Jh. v. Chr. mit seinen "Elementen". Das Werk zeigt erstmals musterhaft den Aufbau einer exakten Wissenschaft. Es beeinflusste auch andere Wissenschaften.

Heutzutage nimmt man üblicherweise die Zermelo–Fränkel-Mengenlehre inklusive dem sogenannten Auswahlaxiom als axiomatische Grundlage für fast alle Zweige der Mathematik. (Abgekürzt mit ZFC, wobei C für choice, d.h. Auswahl steht).

Den Versuch, die axiomatische Absicherung der Erkenntnisse der Mathematik unter einheitlichen strukturellen Gesichtspunkten aufzubauen, wurde seit 1939 von einem französischen Mathematikerteam unter dem Pseudonym Nicolas Bourbaki unternommen. Der streng logische Stil Bourbakis hat die heutige Mathematik entscheidend mitgeprägt.

Grenzen der Axiomatik

Abbildung: Portrait von Kurt Gödel, einem der bedeutendsten Logiker der 20. Jahrhunderts, als Student der Universität Wien im Jahr 1925

Grenzen der Axiomatik

Abbildung: Portrait von Kurt Gödel, einem der bedeutendsten Logiker der 20. Jahrhunderts, als Student der Universität Wien im Jahr 1925

Der axiomatischen Herangehensweise sind Grenzen gesetzt: Der Logiker Kurt Gödel bewies um 1930, dass in jedem mathematischen Axiomensystem entweder wahre, jedoch nicht beweisbare Aussagen existieren, oder aber das System widersprüchlich ist. (Bekannt unter dem Namen Gödelscher Unvollständigkeitssatz.)

Teilgebiete der Mathematik

Mit reiner Mathematik bezeichnet man die theoretische Mathematik, wohingegen die angewandte Mathematik sich eher mit außermathematischen Anwendungen befasst (Physik, Versicherungsmathematik, Kryptologie...).

Teilgebiete der Mathematik

Mit reiner Mathematik bezeichnet man die theoretische Mathematik, wohingegen die angewandte Mathematik sich eher mit außermathematischen Anwendungen befasst (Physik, Versicherungsmathematik, Kryptologie...).

Grobe Einteilung: Arithmetik, Geometrie und Logik

Teilgebiete der Mathematik

Mit reiner Mathematik bezeichnet man die theoretische Mathematik, wohingegen die angewandte Mathematik sich eher mit außermathematischen Anwendungen befasst (Physik, Versicherungsmathematik, Kryptologie...).

Grobe Einteilung: Arithmetik, Geometrie und Logik

Einzelgebiete: Algebra, Algebraische Geometrie, Algebraische Topologie und Differentialtopologie, Analysis, Darstellungstheorie, Differentialgeometrie, Diskrete Mathematik, Experimentelle Mathematik, Funktionalanalysis, Geomathematik, Geometrie, Gruppentheorie, Kommutative Algebra, Komplexe Analysis, Lie-Gruppen, Logik und Mengenlehre, Numerische Mathematik, Philosophie der Mathematik, Topologie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zahlentheorie,. . .

Teilgebiete der Mathematik

Mit reiner Mathematik bezeichnet man die theoretische Mathematik, wohingegen die angewandte Mathematik sich eher mit außermathematischen Anwendungen befasst (Physik, Versicherungsmathematik, Kryptologie...).

Grobe Einteilung: Arithmetik, Geometrie und Logik

Einzelgebiete: Algebra, Algebraische Geometrie, Algebraische Topologie und Differentialtopologie, Analysis, Darstellungstheorie, Differentialgeometrie, Diskrete Mathematik, Experimentelle Mathematik, Funktionalanalysis, Geomathematik, Geometrie, Gruppentheorie, Kommutative Algebra, Komplexe Analysis, Lie-Gruppen, Logik und Mengenlehre, Numerische Mathematik, Philosophie der Mathematik, Topologie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zahlentheorie,...

Die Übergänge zwischen den einzelnen Gebieten sind alle fließend.

Formelsprache der Mathematik

Die Formelsprache der Mathematik ist sehr kompakt und beruht auf Fachbegriffen und vor allem Formeln, die aus verschiedenen Symbolen zusammengesetzt sind. Mathematische Aussagen können rein in ihrer Formelsprache ausgedrückt werden oder auch nur sprachlich, wobei rein sprachliche Versionen oft Ungenauigkeiten beinhalten, die in der Formelsprache meist ausgeschlossen sind.
Beispiel:

Formelsprache der Mathematik

Die Formelsprache der Mathematik ist sehr kompakt und beruht auf Fachbegriffen und vor allem Formeln, die aus verschiedenen Symbolen zusammengesetzt sind. Mathematische Aussagen können rein in ihrer Formelsprache ausgedrückt werden oder auch nur sprachlich, wobei rein sprachliche Versionen oft Ungenauigkeiten beinhalten, die in der Formelsprache meist ausgeschlossen sind. Beispiel:

Formel: $\exists C > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} : \frac{n}{n^2+2} \leq C$

Formelsprache der Mathematik

Die Formelsprache der Mathematik ist sehr kompakt und beruht auf Fachbegriffen und vor allem Formeln, die aus verschiedenen Symbolen zusammengesetzt sind. Mathematische Aussagen können rein in ihrer Formelsprache ausgedrückt werden oder auch nur sprachlich, wobei rein sprachliche Versionen oft Ungenauigkeiten beinhalten, die in der Formelsprache meist ausgeschlossen sind.
Beispiel:

Formel: $\exists C > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : \frac{n}{n^2+2} \leq C$

Deutsch z.B.: Es gibt eine positive reelle Zahl C, so dass die Bruchzahlen $\frac{n}{n^2+2}$ alle kleiner gleich C sind für alle natürlichen Zahlen n.

Definitionen

Definitionen

Für die Entwicklung mathematischer Theorien sind Definitionen wichtig, bei der neue mathematische Begriffe oder Abkürzungen auf vorherige zurückgeführt und präzisiert werden.

Definitionen

Für die Entwicklung mathematischer Theorien sind Definitionen wichtig, bei der neue mathematische Begriffe oder Abkürzungen auf vorherige zurückgeführt und präzisiert werden.

Beispiel:
Definition: eine *gerade* natürliche Zahl ist eine natürliche Zahl, die durch 2 teilbar ist.

Definitionen

Für die Entwicklung mathematischer Theorien sind Definitionen wichtig, bei der neue mathematische Begriffe oder Abkürzungen auf vorherige zurückgeführt und präzisiert werden.

Beispiel:
Definition: eine *gerade* natürliche Zahl ist eine natürliche Zahl, die durch 2 teilbar ist.

Diese Definition geht auf die Definitionen einer natürlichen Zahl, der Zahl 2 und die Teilbarkeit zurück.

Definitionen

Für die Entwicklung mathematischer Theorien sind Definitionen wichtig, bei der neue mathematische Begriffe oder Abkürzungen auf vorherige zurückgeführt und präzisiert werden.

Beispiel:
Definition: eine *gerade* natürliche Zahl ist eine natürliche Zahl, die durch 2 teilbar ist.

Diese Definition geht auf die Definitionen einer natürlichen Zahl, der Zahl 2 und die Teilbarkeit zurück.

In knapper Formelsprache kann man diese Definition z. B. so aufschreiben: Def.: $n \in \mathbb{N}\ \mathit{gerade} :\Leftrightarrow 2 \mid n$

Definitionen

Für die Entwicklung mathematischer Theorien sind Definitionen wichtig, bei der neue mathematische Begriffe oder Abkürzungen auf vorherige zurückgeführt und präzisiert werden.

Beispiel:
Definition: eine *gerade* natürliche Zahl ist eine natürliche Zahl, die durch 2 teilbar ist.

Diese Definition geht auf die Definitionen einer natürlichen Zahl, der Zahl 2 und die Teilbarkeit zurück.

In knapper Formelsprache kann man diese Definition z. B. so aufschreiben: Def.: $n \in \mathbb{N}$ *gerade* $:\Leftrightarrow 2 \mid n$

Dabei wird das Symbol $\mid$ für "teilen" vorher definiert, etwa so:
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Def.: $a \mid b :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : ac = b$

Das griechische Alphabet

A α alpha	I ι iota	P ρ,ϱ rho
B β beta	K κ,$\varkappa$ kappa	Σ σ,ς sigma
Γ γ gamma	Λ λ lambda	T τ tau
Δ δ delta	M μ mü	Υ,Y υ ypsilon
E ϵ,ε epsilon	N ν nü	Φ ϕ,φ phi
Z ζ zeta	Ξ ξ xi	X χ chi
H η eta	O o omikron	Ψ ψ psi
Θ θ,ϑ theta	Π π,ϖ pi	Ω ω omega

Plan und Ziele für den Vorkurs 2015

Wir werden in unserem Vorkurs auf das Studium in Mathematik vorbereiten. Dazu gehört, dass wir uns mit der Grundlage der Mathematik, der Aussagenlogik befassen und dabei die (Formel-)Sprache, in der Mathematik formuliert wird, kennen lernen.

Plan und Ziele für den Vorkurs 2015

Wir werden in unserem Vorkurs auf das Studium in Mathematik vorbereiten. Dazu gehört, dass wir uns mit der Grundlage der Mathematik, der Aussagenlogik befassen und dabei die (Formel-)Sprache, in der Mathematik formuliert wird, kennen lernen.

Die Erlernung von mathematischem Schlussfolgern und Beweisprinzipien, was im Studium täglich benötigt und angewandt wird, soll dabei im Vordergrund stehen. Wir geben auch Tipps für die spätere Praxis des "logischen Denkens" im Studium.

Plan und Ziele für den Vorkurs 2015

Wir werden in unserem Vorkurs auf das Studium in Mathematik vorbereiten. Dazu gehört, dass wir uns mit der Grundlage der Mathematik, der Aussagenlogik befassen und dabei die (Formel-)Sprache, in der Mathematik formuliert wird, kennen lernen.

Die Erlernung von mathematischem Schlussfolgern und Beweisprinzipien, was im Studium täglich benötigt und angewandt wird, soll dabei im Vordergrund stehen. Wir geben auch Tipps für die spätere Praxis des "logischen Denkens" im Studium.

Zudem werden wir nebenher an einiges aus dem Schulstoff erinnern bzw. uns einen ersten wissenschaftlichen Blick auf die Mathematik erarbeiten.

Überblick über den Inhalt des Vorkurses:

VK1: Logik und Beweise

VK2: Elementare Mengenlehre

VK3: Zahlen und Zahlbereiche, vollständige Induktion

VK4: Elementare reelle Arithmetik, Ungleichungen und Intervalle

VK5: Funktionen, Folgen und Grenzwerte

VK6: Komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen

VK7: Ausblick in die

Analysis: Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integration

Lineare Algebra: Vektoren, Dimension, Matrizen