Vorkurs Mathematik 2015

WWU Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik

PD Dr. K. Halupczok

Skript VK4 vom 15.9.2015

VK4: Elementare reelle Arithmetik: Ungleichungen, Intervalle und Potenzrechnung

Wir möchten später die Grenzwerttheorie in $\mathbb{R}$ behandeln, dafür brauchen wir verschiedene Begriffe und Rechenregeln. Wir wollen dafür sagen können, was "immer näher" heißt, also Abstände messen können. Dafür greifen wir auf die Ordnungsrelation und ihre Rechenregeln zurück. Weiter wird der Vollständigkeitsbegriff über die Ordnungsrelation definiert, deshalb braucht man auch ständig Rechenregeln für die Ordnungsrelation ("abschätzen..."), die Wichtigsten geben wir hier an: $(a, b, x, y \in \mathbb{R})$

Wir möchten später die Grenzwerttheorie in $\mathbb{R}$ behandeln, dafür brauchen wir verschiedene Begriffe und Rechenregeln. Wir wollen dafür sagen können, was "immer näher" heißt, also Abstände messen können. Dafür greifen wir auf die Ordnungsrelation und ihre Rechenregeln zurück. Weiter wird der Vollständigkeitsbegriff über die Ordnungsrelation definiert, deshalb braucht man auch ständig Rechenregeln für die Ordnungsrelation ("abschätzen..."), die Wichtigsten geben wir hier an: $(a, b, x, y \in \mathbb{R})$

1	$x \leq y \Leftrightarrow (x < y \vee x = y)$
2	$x \leq y \wedge a \leq b \Rightarrow a + x \leq b + y$
3	$x \leq y \wedge a \geq 0 \Rightarrow a \cdot x \leq a \cdot y$
4	$x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
5	$0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$

Definition 1: Der Betrag $|a|$ einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist wieder eine reelle Zahl und ist definiert durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Definition 1: Der Betrag $|a|$ einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist wieder eine reelle Zahl und ist definiert durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Definition 2: Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so bezeichnet $|a - b|$ den Abstand der beiden reellen Zahlen.

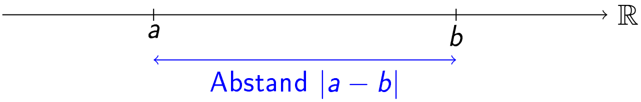
Definition 1: Der Betrag $|a|$ einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist wieder eine reelle Zahl und ist definiert durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Definition 2: Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so bezeichnet $|a - b|$ den Abstand der beiden reellen Zahlen.

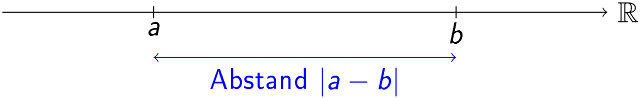
Abstände sind immer ≥ 0. Die reelle Zahl $|a - b|$ ist gerade der Abstand der zu a und b gehörigen Punkte auf der reellen Zahlengeraden.

Man veranschaulicht $\mathbb{R}$ nämlich gerne als Zahlenstrahl:



Oftmals stellt man sich reelle Zahlen am besten als Punkte auf dem Zahlenstrahl vor, wie etwa hier $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Man veranschaulicht $\mathbb{R}$ nämlich gerne als Zahlenstrahl:



Oftmals stellt man sich reelle Zahlen am besten als Punkte auf dem Zahlenstrahl vor, wie etwa hier $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
Für den Betrag gelten die folgenden Rechenregeln: $(a, b \in \mathbb{R})$

1	$-\lvert a\rvert \leq a \leq \lvert a\rvert$
2	$\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$
3	$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$
4	$\lvert a\rvert \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
5	$\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$

Die Regel Nr. 4 gilt hier auch mit $<$ statt $\leq$.
Die letzte Ungleichung hier, Regel Nr. 5, heißt Dreiecksungleichung.

VK4: Elementare reelle Arithmetik: Ungleichungen, Intervalle und Potenzrechnung

- Ungleichungen
- Intervalle
- Noch mehr elementare Arithmetik in $\mathbb{R}$

Spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Intervalle, die wir wie folgt definieren:

Definition 3: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann ist

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\} \text{ ein abgeschlossenes } \underline{\text{Intervall}},$$
$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\} \text{ ein offenes } \underline{\text{Intervall}}.$$

Spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Intervalle, die wir wie folgt definieren:

Definition 3: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann ist

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\} \text{ ein abgeschlossenes } \underline{\text{Intervall}},$$
$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\} \text{ ein offenes } \underline{\text{Intervall}}.$$

Entsprechend definiert man auch halboffene Intervalle $(a, b], [a, b)$. Abkürzend schreibt man

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}, \qquad (b, \infty) := \{x \in \mathbb{R};\ x > b\}$$

usw. Beachten Sie dabei, dass die Symbole $\pm\infty$ hierbei nicht als Zahlen verstanden werden dürfen.

Zum Arbeiten/Rechnen mit Intervallen und Beträgen ist die folgende Übung als Einstieg lehrreich:

Zum Arbeiten/Rechnen mit Intervallen und Beträgen ist die folgende Übung als Einstieg lehrreich:

Beispiel 1: Schreiben Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von Intervallen und beweisen Sie Ihre Behauptung:

(a) $\{x \in \mathbb{R};\ |x| < 3\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R};\ |4x| > 1\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R};\ |1 + x| \leq 2\}$

(d) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |x| \leq 7\}$

(e) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |2x - 4| \geq 5\}$

(f) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |-x^2 + 1| \geq 2\}$

(g) $\{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R};\ |x - 1| \leq 2\}$

Zum Arbeiten/Rechnen mit Intervallen und Beträgen ist die folgende Übung als Einstieg lehrreich:

Beispiel 1: Schreiben Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von Intervallen und beweisen Sie Ihre Behauptung:

(a) $\{x \in \mathbb{R};\ |x| < 3\}$
(b) $\{x \in \mathbb{R};\ |4x| > 1\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R};\ |1 + x| \leq 2\}$
(d) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |x| \leq 7\}$
(e) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |2x - 4| \geq 5\}$
(f) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |-x^2 + 1| \geq 2\}$
(g) $\{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R};\ |x - 1| \leq 2\}$

(Sie können diese Teilmengen von $\mathbb{R}$ auch zeichnerisch am Zahlenstrahl darstellen.)

Als Beispiel zeigen wir, wie man die Lösung von (c) aufschreiben kann:
Beh.: Es gilt $\{x \in \mathbb{R};\ |1 + x| \leq 2\} = [-3, 1]$.

Als Beispiel zeigen wir, wie man die Lösung von (c) aufschreiben kann:

Beh.: Es gilt $\{x \in \mathbb{R};\ |1 + x| \leq 2\} = [-3, 1]$.

Bew.: Es ist

$$|1 + x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 1 + x \leq 2 \text{ nach Betragsregel Nr. 4}$$
$$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-3, 1].$$

$\square$

Als Beispiel zeigen wir, wie man die Lösung von (c) aufschreiben kann:
Beh.: Es gilt $\{x \in \mathbb{R};\ |1+x| \leq 2\} = [-3, 1]$.

Bew.: Es ist

$$\begin{aligned} |1+x| \leq 2 &\Leftrightarrow -2 \leq 1 + x \leq 2 \text{ nach Betragsregel Nr. 4} \\ &\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-3, 1]. \end{aligned}$$

$\square$

Ein weiteres lehrreiches Beispiel ohne Beträge, aber mit auftauchenden quadratischen Termen (es werden Fallunterscheidungen nötig, daher ist die Lösung etwas umfangreicher):

Beispiel 2: **Beh.:** Es gilt
$\{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\};\ \frac{x^2+1}{x-1} \geq 2x - 1\} = (-\infty, 0] \cup (1, 3]$.
Bew.: Es ist

$$\frac{x^2+1}{x-1} \geq 2x - 1$$

Beispiel 2: **Beh.:** Es gilt
$\{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\};\ \frac{x^2+1}{x-1} \geq 2x-1\} = (-\infty, 0] \cup (1, 3]$.
Bew.: Es ist

$$\frac{x^2+1}{x-1} \geq 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 \geq (2x-1)(x-1), & \text{falls } x-1>0 \\ x^2+1 \leq (2x-1)(x-1), & \text{falls } x-1<0 \end{cases}$$

Beispiel 2: **Beh.:** Es gilt
$\{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\};\ \frac{x^2+1}{x-1} \geq 2x-1\} = (-\infty, 0] \cup (1, 3].$
Bew.: Es ist

$$\frac{x^2+1}{x-1} \geq 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 \geq (2x-1)(x-1), & \text{falls } x-1>0 \\ x^2+1 \leq (2x-1)(x-1), & \text{falls } x-1<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 \geq 2x^2-3x+1, & \text{falls } x>1 \\ x^2+1 \leq 2x^2-3x+1, & \text{falls } x<1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x \leq 0, & \text{falls } x>1 \\ x^2-3x \geq 0, & \text{falls } x<1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \leq 0 \wedge x \geq 0, & \text{falls } x>1 \\ x-3 \geq 0 \wedge x \leq 0, & \text{falls } x>1 \\ x-3 \leq 0 \wedge x \leq 0, & \text{falls } x<1 \\ x-3 \geq 0 \wedge x \geq 0, & \text{falls } x<1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 < x \leq 3\ \vee x \leq 0 \text{ (denn Fälle 2 und 4 entfallen)}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup (1, 3].$$

Beispiel 3: Für jede reelle Zahl a gilt $\sqrt{a^2} = |a|$.

Beispiel 3: Für jede reelle Zahl a gilt $\sqrt{a^2} = |a|$.

Dies hilft z. B. in folgender Aufgabe:
Beh.: $\{x \in \mathbb{R};\ (x+1)^2 + 5 \leq 9\} = [-3, 1]$.

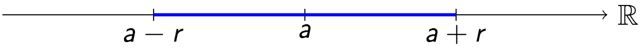
Beispiel 3: Für jede reelle Zahl a gilt $\sqrt{a^2} = |a|$.

Dies hilft z. B. in folgender Aufgabe:
Beh.: $\{x \in \mathbb{R};\ (x+1)^2 + 5 \leq 9\} = [-3, 1]$.

Bew.: Es ist $(x+1)^2 + 5 \leq 9 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x+1| \leq 2$, dann weiter wie bei (c). $\square$

Beispiel 4: Eine Betragsungleichung der Form $|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$ hat für alle $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ das Intervall $[a - r, a + r]$ zur Lösung. Das Intervall ist die Menge aller reeller Zahlen, die als Punkte auf dem Zahlenstrahl interpretiert höchstens den Abstand r von der reellen Zahl a (als Punkt) haben. Das Intervall kann also geometrisch interpretiert werden als der eindimensionale Ball mit Mittelpunkt a und Radius r.

Beispiel 4: Eine Betragsungleichung der Form $|x-a| \leq r \Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r$ hat für alle $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ das Intervall $[a-r, a+r]$ zur Lösung. Das Intervall ist die Menge aller reeller Zahlen, die als Punkte auf dem Zahlenstrahl interpretiert höchstens den Abstand r von der reellen Zahl a (als Punkt) haben. Das Intervall kann also geometrisch interpretiert werden als der eindimensionale Ball mit Mittelpunkt a und Radius r.



VK4: Elementare reelle Arithmetik: Ungleichungen, Intervalle und Potenzrechnung

Wir wollen nun weiter mit $\mathbb{R}$ rechnen und definieren noch genau, was Potenzen und Wurzeln sind, sowie geben ein paar Regeln der Potenzrechnung:

Definition 4: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man die n-te Potenz von a als $a^n := \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}}$, sowie $a^0 := 1$. Eine 2-te Potenz heißt auch Quadrat.

Wir wollen nun weiter mit $\mathbb{R}$ rechnen und definieren noch genau, was Potenzen und Wurzeln sind, sowie geben ein paar Regeln der Potenzrechnung:

Definition 4: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man die n-te Potenz von a als $a^n := \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}}$, sowie $a^0 := 1$. Eine 2-te Potenz heißt auch Quadrat.

Für eine negative ganze Zahl $-n$, wenn $n \in \mathbb{N}$ ist, definieren wir $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$. Ist $x = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$ und $a \in \mathbb{R}_{>0}$, definieren wir $a^x = \sqrt[k]{a^m}$ als diejenige nichtnegative reelle Zahl y, für die die Gleichung $y^k = a^m$ gilt (falls y existiert).

Wir wollen nun weiter mit $\mathbb{R}$ rechnen und definieren noch genau, was Potenzen und Wurzeln sind, sowie geben ein paar Regeln der Potenzrechnung:

Definition 4: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man die n-te Potenz von a als $a^n := \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}}$, sowie $a^0 := 1$. Eine 2-te Potenz heißt auch Quadrat.

Für eine negative ganze Zahl $-n$, wenn $n \in \mathbb{N}$ ist, definieren wir $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$. Ist $x = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$ und $a \in \mathbb{R}_{>0}$, definieren wir $a^x = \sqrt[k]{a^m}$ als diejenige nichtnegative reelle Zahl y, für die die Gleichung $y^k = a^m$ gilt (falls y existiert).

Das Symbol $\sqrt[k]{}$ heißt k-te Wurzel. In einer Potenz a^r heißt a die Basis, und r der Exponent.

Hier die wichtigen Regeln der Potenzrechnung: ($a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $x, y \in \mathbb{Q}$)

1	$a^x a^y = a^{x+y}$
2	$(ab)^x = a^x b^x$
3	$(a^x)^y = a^{xy}$
4	$a > 1 \Rightarrow (x < y \Leftrightarrow a^x < a^y)$

Hier die wichtigen Regeln der Potenzrechnung: ($a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $x, y \in \mathbb{Q}$)

1	$a^x a^y = a^{x+y}$
2	$(ab)^x = a^x b^x$
3	$(a^x)^y = a^{xy}$
4	$a > 1 \Rightarrow (x < y \Leftrightarrow a^x < a^y)$

Achtung: $a^{(x^y)}$ ist fast immer eine andere Zahl als $(a^x)^y$. Z. B. ist $2^{(2^3)} = 2^8$, aber $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$. Lässt man die Klammern weg und schreibt a^{x^y}, so meint man damit den Ausdruck $a^{(x^y)}$.

Und wie definiert man Potenzen für reelle Hochzahlen? Also a^x für $a, x \in \mathbb{R}$?

Und wie definiert man Potenzen für reelle Hochzahlen? Also a^x für $a, x \in \mathbb{R}$?

Antwort: Das kann man über ein Supremum bzw. Grenzwert definieren. Wir benutzen dafür aber später die Exponentialfunktion, mit der das sehr elegant geht. Damit kann man dann auch Gleichungen vom Typ $a^x = y$ nach x auflösen, sofern a und y nichtnegativ sind. Auch eine Auflösung nach a wird dann möglich sein. Das machen wir in Kapitel VK6.

Beispiel 5: Zur Einübung und Anwendung der Rechenregeln für Potenzen vereinfachen wir die folgenden Ausdrücke ($x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

- $y^{-7} \cdot ((y^{-1})^{-2})^{-3} =$
- $\frac{(xy)^{-2}}{(xy^2)^{-3}} =$
- $\frac{6x^3y^2z^5}{12x^2y^3z^5} =$
- $\sqrt[3]{8} =$
- $\sqrt{1,21} =$
- $(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x})^2 \cdot x^{-1} =$

Beispiel 6: Wo ist der Fehler? Hier wird $2 = -2$ "bewiesen":
$2 = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{(-8)^2} = (-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2.$

Beispiel 6: Wo ist der Fehler? Hier wird $2 = -2$ "bewiesen":
$2 = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{(-8)^2} = (-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2.$

Beispiel 7: Welche Kantenlänge hat ein Würfel, der 8 Milliarden Liter fasst?