Vorkurs Mathematik 2015

WWU Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik

PD Dr. K. Halupczok

Skript VK6 vom 22.9.2015

Definition 1: Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist durch den Grenzwert

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

eine Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert, sie heißt <u>Exponentialfunktion</u>.

Es folgt sofort, dass $e = \exp(1)$ und $\exp(0) = 1$. Eine fundamentale Eigenschaft ist $(x, y \in \mathbb{R})$:

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y),$$

so dass (nach etwas Beweisarbeit) folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Q} : \exp(xy) = \exp(x)^y.$$

Also ist $\exp(y) = e^y$ für alle $y \in \mathbb{Q}$.

Damit bekommen wir unsere alte Frage in den Griff, wie man mit irrationalen Hochzahlen arbeitet. Die folgende Definition ist nun sinnvoll:

Definition 2: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ definieren wir $e^x := \exp(x)$.

Einige Rechenregeln lassen sich dann wie folgt zusammenfassen $(x, y \in \mathbb{R})$:

1	$e^{x+y} = e^x e^y$
2	$(e^x)^y = e^{xy}$
3	$x < y \Rightarrow e^x < e^y$
4	$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Als Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist die Exponentialfunktion u. a. wegen Regel 3 eine bijektive Funktion, man kann dann die zugehörige Umkehrabbildung definieren:

Definition 3: Die Funktion $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist definiert als Umkehrabbildung von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, d. h. über die Eigenschaft

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad && \ln(\exp(x)) = x \\ \text{bzw.} \quad &\forall\, y \in \mathbb{R}_{>0} : \quad && \exp(\ln(y)) = y. \end{aligned}$$

Sie heißt der natürliche Logarithmus.

Die definierende Eigenschaft von ln lässt sich auch schreiben als die Aussage

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} : \quad (y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x)$$

Für beliebige Basen $a > 0$ können wir jetzt die Potenz mit beliebigen reellen Hochzahlen über die Exponential- und Logarithmusfunktion berechnen:

Satz

Für $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $a^x = e^{x \ln a}$.

Beweis: Nach Regel 2 und der Definition von ln gilt:
$e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$. □

Die bisherigen Potenzgesetze gelten jetzt uneingeschränkt für alle positiven Basen a.

Wir fassen noch einige weitere Rechenregeln zusammen, die beim Rechnen mit exp, ln und Potenzen nützlich sind, und die sich aus bisher notierten Regeln herleiten lassen.

1	$\forall\, x, y \in \mathbb{R}_{>0}: \ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2	$\forall\, x, y \in \mathbb{R}_{>0}: \ \ln \frac{x}{y} = \ln(x) - \ln(y)$
3	$\forall\, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_{>0}: \ \ln(a^x) = x \ln(a)$

Somit gelingt uns das Auflösen der Gleichung $a^x = c$ nach a: Es ist $a = c^{1/x}$, falls $x \neq 0$ und $c > 0$; und diese Potenz ist jetzt berechenbar als $a = e^{(\ln c)/x}$.

Außerdem können wir jetzt die Gleichung $a^x = c$ sogar nach x auflösen: Es ist $x = \frac{\ln(c)}{\ln(a)}$, falls $a, c > 0$, $a \neq 1$.

Beweis:

$$a^x = c \Leftrightarrow \ln(a^x) = \ln(c) \Leftrightarrow x \ln(a) = \ln(c) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(c)}{\ln(a)}. \qquad \square$$

Man nennt die Zahl x mit $a^x = c$ auch den <u>Logarithmus von c zur Basis a</u> und schreibt $\ln_a(c) = x$ oder auch $\log_a(c) = x$ dafür.

Beispiel 1: Als ein Rechenbeispiel zum Thema exp und ln demonstrieren wir noch das Auflösen der Gleichung $a^x = c \cdot b^x$ nach x (falls $a, b, c > 0$ und $a \neq b$):

$$\begin{aligned} a^x = c \cdot b^x &\Leftrightarrow \ln(a^x) = \ln(c \cdot b^x) \\ &\Leftrightarrow x \ln(a) = \ln(c) + \ln(b^x) \\ &\Leftrightarrow x \ln(a) = \ln(c) + x \ln(b) \\ &\Leftrightarrow x(\ln(a) - \ln(b)) = \ln(c) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln(c)}{\ln(a) - \ln(b)} \end{aligned}$$

Zwei interessante Grenzwerte mit exp und ln sind ($k \in \mathbb{N}$ beliebig):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\exp(n)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^{1/k}} = 0.$$

Man kann die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen einfach definieren als Menge $\mathbb{R}^2$, versehen mit der richtigen Definition für "+" und "·".

Eine Verwechslung mit $\mathbb{R}^2$ als Menge möchte man aber möglichst vermeiden, daher schreibt man anstelle eines Zahlenpaares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lieber das Symbol $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und nennt dies eine komplexe Zahl mit Realteil x und Imaginärteil y.

Im Koordinatensystem der Ebene lassen sich die komplexen Zahlen dann als Punkte darstellen. Die x-Achse nennt man dann auch die reelle Achse, die y-Achse die imaginäre Achse.

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C} := \{x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ bezeichnet. Für zwei komplexe Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ gilt: $z = w \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$.

Die Summe bzw. Differenz zweier komplexer Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ wird jetzt komponentenweise definiert, d. h.

$$z \pm w := (x \pm u) + i(y \pm v).$$

Die Multiplikation hingegen muss anders gemacht werden, die Definition hierfür lautet

$$zw := (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Daraus folgt, dass

$$i^2 = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1$$

ist, das alte Problem mit der Lösbarkeit von $x^2 = -1$ ist damit erledigt: Die Gleichung hat in $\mathbb{C}$ die Lösung $x = i$ (und auch $x = -i$). Daher können wir dem Symbol $\sqrt{-1}$ einen Sinn geben und $\sqrt{-1} := i$ schreiben.

Zunächst muss gesagt werden, dass $\mathbb{C}$ mit den so definierten Verknüpfungen "$+$" und "$\cdot$" einen Körper bildet, der $\mathbb{R}$ enthält, nämlich in Form der speziellen komplexen Zahlen $x + i \cdot 0$. Die Körperaxiome muss man also alle nachrechnen.
Die dafür nötige Division als Umkehrung der Multiplikation erhält man über

$$\frac{z}{w} = \frac{x+iy}{u+iv} := \frac{xu+yv}{u^2+v^2} + i\frac{yu-xv}{u^2+v^2}.$$

Noch zwei Begriffe:
Definition 4: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Die zu z konjugiert komplexe Zahl ist $\overline{z} := x - iy$. Der Betrag $|z|$ von z ist die nichtnegative reelle Zahl $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

Die Lösung von Gleichungen mit Potenzen in x kann in $\mathbb{C}$ jetzt beliebig ausgeführt werden, es gilt nämlich der folgende Satz von Gauß, der auch Fundamentalsatz der Algebra genannt wird:

Satz

(Fundamentalsatz der Algebra) Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$ ein nicht konstantes Polynom mit $n \in \mathbb{N}$ und komplexen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$. Dann hat das Polynom eine komplexe Nullstelle, d. h. es gibt eine Zahl $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $P(z) = 0$ löst.

Bewiesen wird dieser Satz oft in einer Vorlesung über Funktionentheorie.

Inwiefern vererben sich die anderen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$? Nun, die Vollständigkeit in dem Sinne, dass Cauchyfolgen immer einen Grenzwert besitzen, vererbt sich nach $\mathbb{C}$, denn Grenzwerte kann man in $\mathbb{C}$ komponentenweise bilden, und als den (für den Grenzwertbegriff nötigen) Abstand zwischen zwei komplexen Zahlen z, w nehmen wir den Wert $|z - w|$.

Aber ein Opfer müssen wir bei dieser Erweiterung von $\mathbb{R}$ hinnehmen: Die Ordnungsrelation $\leq$ kann nicht auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden, d.h. $\mathbb{C}$ ist nicht anordenbar und kann damit nicht auf einen einzigen Zahlenstrahl gebracht werden, wie das mit $\mathbb{R}$ ging. Bei der Veranschauung von $\mathbb{C}$ müssen wir stets mit der ganzen komplexen Ebene arbeiten, ein einziger "Anordnungsstrahl" reicht hier nicht aus. Daher ist ein Ausdruck wie $i < 2$ absolut sinnlos. Hingegen ist die Aussage $|i| < 2$ wahr, da der Betrag den Abstand einer komplexen Zahl zum Nullpunkt $0 = 0 + i \cdot 0$ misst und eine reelle Zahl ist.

Für das Rechnen in $\mathbb{C}$ gelten die folgenden Rechenregeln ($w, z \in \mathbb{C}$):

1	$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2	$\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3	$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, falls $w \neq 0$
4	$\overline{\overline{z}} = z$
5	$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
6	$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
7	$\lvert z \rvert = \sqrt{z\overline{z}}$
8	$\lvert zw \rvert = \lvert z \rvert \cdot \lvert w \rvert$
9	$\lvert \frac{z}{w} \rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert w \rvert}$ falls $w \neq 0$
10	$\lvert z \rvert = \lvert \overline{z} \rvert$
11	$\lvert z + w \rvert \leq \lvert z \rvert + \lvert w \rvert$

Die Exponentialfunktion kann durch ihre Reihendarstellung $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ zu einer Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

Die alte Formel $\forall z, w \in \mathbb{C} : \exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$ bleibt für komplexe Zahlen gültig. Aus dieser kann man nun herleiten, dass $\forall x \in \mathbb{R} : |\exp(ix)| = 1$, denn: $|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(\overline{ix}) = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(0) = 1$.

Und es gelten die folgenden Rechenregeln, die Moivresche Formeln heißen ($x, y \in \mathbb{R}$):

1	$\exp(ix)\exp(iy) = \exp(i(x + y))$
2	$(\exp(ix))^n = \exp(inx)$, $n \in \mathbb{Z}$
3	$\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix) = \frac{1}{\exp(ix)}$

Eine Warnung zum Rechnen mit komplexen Zahlen: Die Moivresche Formel Nr. 2 stimmt nur mit ganzen Zahlen n, d. h. im allgemeinen ist $(\exp(ix))^r \neq \exp(ixr)$ für $r \notin \mathbb{Z}$.

Denn würde man beispielsweise $\frac{1}{2}$ einsetzen für die Zahl r bzw. n und den Wert $x = 2\pi$ betrachten, so erhält man
$l.S. = (\exp(2\pi i))^{1/2} = 1^{1/2} = 1$, aber
$r.S. = \exp(i \cdot \pi) = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1$.

Nun können wir die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus wie folgt definieren:

Definition 5: Für $z \in \mathbb{C}$ ist durch $\cos(z) := \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$ die <u>Cosinusfunktion</u> $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, und durch $\sin(z) := \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$ die <u>Sinusfunktion</u> $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert.

Es folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ die <u>Eulersche Formel</u> $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ und sofort, dass $\sin^2 x + \cos^2 x = |\exp(ix)|^2 = 1$.

Die beiden Funktionen $\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind für reelle x reellwertig mit Werten in $[-1, 1]$ und periodisch mit derselben Periode. Die Hälfte der Periodenlänge kann man nun als die Zahl $\pi \in \mathbb{R}$ definieren und somit die Periodizität notieren in der Form

$\forall\, x \in \mathbb{R} : \cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$

Damit ist auch $\exp(2\pi i) = 1$, bzw. $\exp(x + 2\pi i) = \exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Weiter haben die Funktionen sin und cos genau die Nullstellen

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots$$
$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$

Ist nun $z \in \mathbb{C}$, gibt es eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $\varphi \in (-\pi, \pi]$ so dass $z = |z| \exp(i\varphi)$ gilt. Diese Zahl heißt <u>Argument</u> von z und die Darstellung $z = |z| \exp(i\varphi)$ heißt die Darstellung von z in <u>Polarkoordinaten</u>.

Das Rechnen mit komplexen Zahlen in Polarkoordinaten geht nun besonders leicht, da für $z = |z| \exp(i\varphi)$ und $w = |w| \exp(i\psi)$ gilt:

$z \cdot w = |z||w| \exp(i(\varphi + \psi)), \quad \dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|} \exp(i(\varphi - \psi)),$ falls $w \neq 0$.

Formeln für die trigonometrischen Funktionen sin und cos wie die Additionstheoreme

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

und zahlreiche weitere Identitäten, die man für diese Funktionen in Formelsammlungen findet, lassen sich nun leicht herleiten: Für die Additionstheoreme z. B. berechnet man

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= \exp(i(x+y)) = \exp(ix)\exp(iy)\\ &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)\\ &= (\cos x\cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x\cos y + \sin y \cos x)\end{aligned}$$

und vergleicht die Real- und Imaginärteile der linken und rechten Seite miteinander.

Die Funktion $\tan : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$, $\tan z := \sin z / \cos z$ mit $S := \{\pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots\}$ kommt auch oft vor und heißt Tangensfunktion.

Eine Tabelle mit den wichtigsten Sinus-/Kosinus-/Tangens-Werten:

Grad	Bogenmaß	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	-

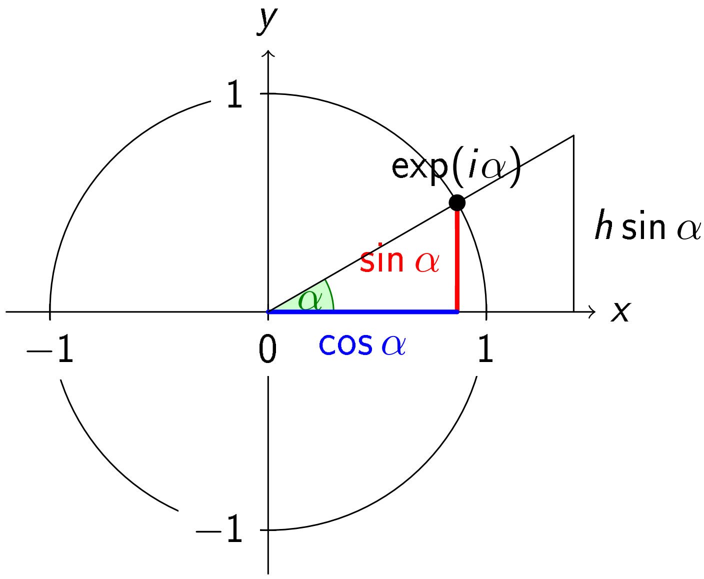
Eine der wichtisten Anwendungen der Trigonometrie sind die Dreiecksberechnungen. Diese kennen Sie bestimmt noch aus der Schule, hier eine kurze Wiederholung:

Im rechtwinkligen Dreieck gilt für jeden Innenwinkel α, der nicht der rechte Winkel ist:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}.$$



Warum gelten diese Formeln? Sie gelten im Einheitskreis, da $\exp(i\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ für reelle α den Einheitskreis durchläuft wegen $|\exp(i\alpha)| = 1$, und dort die Formeln für das Dreieck mit der Hypotenusenlänge (gleich Radius) 1 gelten.

Bei linearer Streckung des Kreises am Ursprung um einen beliebigen Faktor $h > 0$ erhalten wir ein Dreieck mit Hypotenusenlänge h, Gegenkathetenlänge $h\sin\alpha$ und Ankathetenlänge $h\cos\alpha$. Der Winkel bleibt gleich, also auch $\sin\alpha = \frac{h\sin\alpha}{h}$ usw.

Im Bild mit dem Einheitskreis wird auch die Periodizität nach Durchlaufen des Vollkreises klar, man landet bei dem gleichen Wert $\exp(i\alpha) = \cos\alpha + i \sin\alpha$. Dass dies gerade beim Wert $2\pi = 2 \cdot 3.141592654...$ geschieht, kann man numerisch ausrechnen (Dafür werden geeignete Reihenentwicklungen der trigonometrischen Funktionen eingesetzt).

Dass 2π außerdem die Länge des Kreisumfangs ist, rechnet man meist in Analysis 2 mithilfe eines Kurvenintegrals nach, das die Länge einer Kurve (hier des Kreisbogens) misst.