Lösungshinweise zum Übungsblatt Nr. 2, Besprechung am 13.9.2016

Aufgabe 1: Deutsch → Formel, Formel → Deutsch

Gegeben seien folgende deutsche Sätze:

1. "Person x, die keinen anderweitigen Anspruch auf Absicherung im Krankheitsfall hat und zuletzt gesetzlich krankenversichert war, ist versicherungspflichtig."
2. "Wenn man nachts ohne Licht fährt, sieht man nichts; es sei denn, es ist Vollmond."

Schreiben Sie die Sätze jeweils formal als Implikation auf (kürzen Sie Teile davon ab als A, B, C usw.), und bilden Sie die formale Verneinung bzw. Kontraposition. Wie formuliert man die Verneinung bzw. Kontraposition wieder als deutschen Satz?

Beispiel 1: Der Satz "Wenn es regnet oder der Gulli überläuft, wird die Straße nass." ist formalisierbar als $(A \vee B) \Rightarrow C$. Die Verneinung ist $\neg((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B)) \wedge \neg C \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg C$ und bedeutet "Es regnet oder der Gulli läuft über, und die Straße bleibt trocken." Die Kontraposition ist $(\neg C \Rightarrow \neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B))$ und bedeutet "Wenn die Straße trocken bleibt, dann regnet es nicht, und auch der Gulli läuft nicht über."

Lösung:

Zu 1.: Die Aussage ist formulierbar als $\neg A \wedge B \Rightarrow C$, wobei wie folgt abgekürzt wurde:
$A =$ "Person x hat einen anderweitigen Anspruch auf Absicherung im Krankheitsfall", $B =$"Person x war zuletzt gesetzlich krankenversichert", $C =$ "Person x ist versicherungspflichtig"
Die Kontraposition $\neg C \Rightarrow A \vee \neg B$ bedeutet: "Ist Person x nicht versicherungspflichtig, so hat sie einen anderweitigen Anspruch auf Absicherung im Krankheitsfall oder war zuletzt nicht gesetzlich krankenversichert."
Die Verneinung $\neg A \wedge B \wedge \neg C$ bedeutet "Person x hat keinen anderweitigen Anspruch auf Absicherung im Krankheitsfall, ist zuletzt nicht gesetzlich krankenversichert und ist nicht versicherungspflichtig."

Zu 2.: $B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow C)$
$A =$ "Man fährt nachts ohne Licht." $B =$ "Es ist Vollmond." $C =$ "Man sieht nichts."
Umformulierung: Wenn Vollmond ist, dann ist unwahr, dass man nichts sieht sobald man nachts ohne Licht fährt.
Kontraposition: $(A \Rightarrow C) \Rightarrow \neg B$ bedeutet "Wenn es stimmt, dass man nichts sieht sobald man nachts ohne Licht fährt, dann ist kein Vollmond."
Verneinung: $B \wedge (A \Rightarrow C)$ Es ist Vollmond und man sieht nichts sobald man ohne Licht fährt.

Aufgabe 2: Rechnen mit Aussagenformeln.

Seien A und B Aussagen. Formulieren Sie die folgenden Aussagen um in dazu äquivalente Aussagen, die nur mit den Zeichen $\wedge, \vee$ und $\neg$ auskommen. Verwenden Sie dafür die Logikregeln aus der Vorlesung.

1. $\neg(A \Rightarrow B) \wedge A$
2. $\neg(A \wedge (B \vee \neg A)) \Rightarrow A$
3. $(A \Rightarrow B) \wedge \neg(B \Rightarrow A)$

4. $\neg(A \vee (B \Leftrightarrow A))$

Lösung:

Zu 1. Es ist

$$\begin{aligned}
&\neg(A \Rightarrow B) \wedge A \\
\Leftrightarrow\ &\neg(\neg A \vee B) \wedge A \\
\Leftrightarrow\ &(A \wedge \neg B) \wedge A \\
\Leftrightarrow\ &A \wedge \neg B
\end{aligned}$$

Zu 2. Es ist

$$\begin{aligned}
&(\neg(A \wedge (B \vee \neg A)) \Rightarrow A) \\
\Leftrightarrow\ &(A \wedge (B \vee \neg A)) \vee A \\
\Leftrightarrow\ &(A \vee A) \wedge (A \vee (B \vee \neg A)) \\
\Leftrightarrow\ &A \wedge (B \vee A \vee \neg A) \Leftrightarrow A
\end{aligned}$$

Zu 3. Es ist

$$\begin{aligned}
&(A \Rightarrow B) \wedge \neg(B \Rightarrow A) \\
\Leftrightarrow\ &(\neg A \vee B) \wedge (B \wedge \neg A) \\
\Leftrightarrow\ &\neg A \wedge (B \wedge \neg A) \vee B \wedge (B \wedge \neg A) \\
\Leftrightarrow\ &(\neg A \wedge B) \vee (B \wedge \neg A) \\
\Leftrightarrow\ &\neg A \wedge B
\end{aligned}$$

Zu 4. Es ist

$$\begin{aligned}
&\neg(A \vee (B \Leftrightarrow A)) \\
\Leftrightarrow\ &\neg(A \vee ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))) \\
\Leftrightarrow\ &\neg A \wedge \neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \\
\Leftrightarrow\ &\neg A \wedge ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)) \\
\Leftrightarrow\ &\neg A \wedge (A \wedge \neg B) \vee \neg A \wedge (B \wedge \neg A) \\
\Leftrightarrow\ &\neg A \wedge B
\end{aligned}$$

Bemerkung: Es gibt mehrere mögliche Lösungen dieser Aufgaben. Ferner beachte man, dass die angegebenen Aussagenformeln in 1.–4. nicht unbedingt immer wahre Aussagen ergeben müssen, sondern nur die Äquivalenz der Aussageformeln in den Herleitungen, egal, welche Aussagen man für A und B einsetzt.

Aufgabe 3: Beispiele durch Einsetzen

Setzen Sie erlaubte Objekte ein, um explizite Beispiele für folgende Aussagen zu konstruieren:

(1) Ist $p > 5$ eine Primzahl, dann ist $p^4 - 10p^2 + 9$ durch 1920 teilbar.

(2) Für jede natürliche Zahl n ergibt auch die Zahl

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big)$$

eine natürliche Zahl.

(3) Für jede Quadratzahl $q = n^2$ hat die Gleichung $x^2 - (q+1)y^2 = 1$ die Lösung $x = 2n^2 + 1$ und $y = 2n$.

(4) Die Schnittmenge zweier verschiedener Geraden in der Ebenen $\mathbb{R}^2$ ist entweder leer oder enthält nur ein einziges Element.

(5) Sei B eine beliebige Aussage. Für jede falsche Aussage A gilt dann $\neg A \wedge B \Leftrightarrow B$.

Lösung:

Zu (1): Für $p = 7$ ist $p^4 - 10p^2 + 9 = 7^4 - 10 * 7^2 + 9 = 1920$, für $p = 101$ ist $101^4 - 10 * 101^2 + 9 = 103958400 = 54145 \cdot 1920$, für $p = 13$ ist $13^4 - 10 * 13^2 + 9 = 26880 = 14 \cdot 1920$ usw.
(Beweis, dass die Aussage richtig ist, von Frank Wübbeling:
Das Polynom ist $(p^2 - 1)(p^2 - 9)$, notfalls zu sehen mit der pq-Formel.
Dann betrachtet man einfach die Reste, z. B. für 5: p ist prim > 5, lässt also höchstens die Reste $1, 2, 3, 4$ nach Division durch 5. Also lässt p^2 die Reste $1, 4, 4, 1$. Damit ist entweder $p^2 - 1$ oder $p^2 - 9$ durch 5 teilbar. Für 3: p^2 lässt immer den Rest 1, also ist $p^2 - 1$ durch 3 teilbar. Für 16: p^2 lässt nur die Reste 1 und 9 (notfalls ausrechnen). Also ist einer der beiden Faktoren durch 16, der andere durch 8 teilbar. Insgesamt ist die Zahl mindestens durch $3 * 5 * 16 * 8$ teilbar $= 1920$.)

Zu (2): Für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ ergibt der Ausdruck der Reihe nach die natürlichen Zahlen $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$
(Bezeichnen wir die fragliche Zahl für $n \in \mathbb{N}_0$ mit y_n, dann haben wir $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_{n+2} = y_n + y_{n+1}$, und damit ist das die (ganzzahlige) normierte Fibonaccifolge.)

Zu (3): Für $q = 4$ hat die Gleichung $x^2 - 5y^2 = 1$ die Lösung $x = 9$ und $y = 4$; tatsächlich gilt $9^2 - 5 * 4^2 = 81 - 5 * 16 = 1$.

Zu (4): Die beiden verschiedenen Geraden $\{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$ und $\{(\frac{y-1}{2}, y); y \in \mathbb{R}\}$ haben leeren Durchschnitt. Die beiden verschiedenen Geraden $\{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$ und $\{(x, 1 - x); x \in \mathbb{R}\}$ haben die Schnittmenge $\{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$.

Zu (5): Sei B beliebige Aussage, dann ist $\neg(0 = 1) \wedge B \Leftrightarrow B$.
Es gilt z. B. $\neg(0 = 1) \wedge$ (n ist ungerade Zahl) $\Leftrightarrow$ (n ist ungerade Zahl), oder auch $\neg(0 = 1) \wedge$ (3 ist ungerade Zahl) $\Leftrightarrow$ (3 ist ungerade Zahl).