Lösungshinweise zum Übungsblatt Nr. 3, Besprechung am 15.9.2016

Aufgabe 1: Formulierung direkter Beweise

Zeigen Sie:

1. Jede ungerade natürliche Zahl ist Differenz zweier Quadratzahlen.
2. Für jede natürliche Zahl n sind n^2+n und n^2-n gerade Zahlen.
3. Jede Kubikzahl ist Differenz zweier Quadratzahlen.
4. Für je zwei reelle Zahlen x und y ist $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.

Lösung:

1. Vor.: $n \in \mathbb{N}$, Beh.: $2n+1 = a^2-b^2$ für passende Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$.
Beweis (direkt): Mit $a = n+1$ und $b = n$ ist $a^2-b^2 = (n+1)^2-n^2 = n^2+2n+1-n^2 = 2n+1$. $\square$

2. Vor.: $n \in \mathbb{N}$, Beh.: 2 teilt n^2+n und n^2-n.
Beweis (direkt): Wir haben $n^2+n = n(n+1)$ und $n^2-n = n(n-1)$. Da in den Zahlenpaaren $n, n+1$ und $n, n-1$ immer eine Zahl gerade (und die andere ungerade) sein muss, ist auch deren Produkt gerade. $\square$

3. Vor.: $n \in \mathbb{N}$, Beh.: $n^3 = a^2-b^2$ für passende Zahlen $a, b \in \mathbb{N}_0$.
Beweis (direkt): Setze $a = \frac{n^2+n}{2}$ und $b = \frac{n^2-n}{2}$. Weil n^2+n und n^2-n immer gerade und nicht negativ sind, sind a und b natürliche Zahlen oder 0. Dann ist $a^2-b^2 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2 = n^3$. $\square$

4. Vor: $x, y \in \mathbb{R}$, Beh.: $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.
Beweis (direkt): Es ist

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)(x+y) = x(x+y)+y(x+y)\\ &= x^2+xy+yx+y^2 = x^2+2xy+y^2\end{aligned}$$

für beliebige reelle Zahlen x und y, also folgt

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2 = (x+y)(x^2+2xy+y^2)\\ &= x(x^2+2xy+y^2)+y(x^2+2xy+y^2)\\ &= x^3+2x^2y+xy^2+yx^2+2xy^2+y^3\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung: In 1., 3. und 4. wurde die binomische Formel $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ verwendet, welche in 4. der Vollständigkeit halber nocheinmal bewiesen wurde.

Zum Verständnis der Aussagen: Setzen Sie mal explizit Zahlen ein!

Aufgabe 2: Formulierung eines indirekten Beweises

Formulieren Sie einen indirekten Beweis der folgenden Aussage, einmal in Form eines Widerspruchsbeweises und einmal in Form eines Kontrapositionsbeweises. (Analysieren Sie zunächst, was die Vor. und was die Beh. der Aussage ist.) Zusatzfrage: Wie muss die Aussage formuliert sein, damit Ihr Kontrapositionsbeweis einen direkten Beweis darstellt?

Sei n eine natürliche Zahl größer als 1. Ist $n^2 + 2$ eine Primzahl, dann ist n durch 3 teilbar.

(Hinweis zur Lösung: Verwenden Sie im Beweis, dass eine Zahl $n > 1$, die nicht durch 3 teilbar ist, von der Form $n = 3k + 1$ oder $n = 3k - 1$ ist mit einem $k \geq 1$.)

Bemerkung zum Verständnis der Aufgabe: Setzen Sie explizit Zahlen für n in den Ausdruck $n^2 + 2$ ein, bis Sie auf Primzahlen stoßen. Belegen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass die Rückrichtung nicht gilt.

Lösung:

1. Analyse der Aussage: Sei A der Aussagenteil "n ist eine natürliche Zahl > 1", C sei der Aussagenteil "n^2+2 ist eine Primzahl" und B sei der Aussagenteil "n ist durch 3 teilbar". Dann hat die Aussage die Form $A \Rightarrow (C \Rightarrow B)$. Diese ist äquivalent zu $(A \wedge C) \Rightarrow B$. Sie können daher sowohl "$\boxed{\begin{array}{l}\text{Vor.: } A \\ \text{Beh.: } C \Rightarrow B\end{array}}$" als auch "$\boxed{\begin{array}{l}\text{Vor.: } A \text{ und } C \\ \text{Beh.: } B\end{array}}$" für die Aussage schreiben.

Wir führen nun indirekte Beweise für diese Aussage; ob hierfür die erste oder zweiten Formulierung zugrundegelegt wird, ändert nichts Wesentliches.

2. Wir führen als erstes einen Widerspruchsbeweis der Aussage in der zweiten Formulierung.

Bew. (durch Widerspruch): Angenommen, die natürliche Zahl $n > 1$ ist nicht durch 3 teilbar. (D. h. es gelte $\neg B$.) Dann ist n von der Form $n = 3k + 1$ oder $n = 3k - 1$ mit einem $k \geq 1$, also ist $n^2+2 = (3k+1)^2+2 = 9k^2+6k+1+2$ oder $n^2+2 = (3k-1)^2+2 = 9k^2 - 6k + 1 + 2$, was in jedem Fall > 3 und durch 3 teilbar ist, also keine Primzahl im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $n^2 + 2$ eine Primzahl ist. (D.h. es folgt $\neg C$ und somit auch $\neg(A \wedge C)$) $\square$

3. Wiederum derselbe indirekte Beweis, als Kontrapositionsbeweis zur Aussage in der ersten Formulierung aufgeschrieben (die Voraussetzung A wird grundlegend angenommen und nicht neu erwähnt):

Bew. (durch Kontraposition): Sei n nicht durch 3 teilbar. (D. h. es gelte $\neg B$.) Dann ist n von der Form $n = 3k+1$ oder $n = 3k-1$ mit einem $k \geq 1$, also ist $n^2+2 = (3k+1)^2+2 = 9k^2 + 6k + 1 + 2$ oder $n^2 + 2 = (3k - 1)^2 + 2 = 9k^2 - 6k + 1 + 2$, was in jedem Fall > 3 und durch 3 teilbar ist, also keine Primzahl ist. (Das ist Aussagenteil $\neg C$.) $\square$

4. Zur Zusatzfrage: Wie muss die Aussage formuliert sein, damit Ihr Kontrapositionsbeweis einen direkten Beweis darstellt?

Der Kontrapositionsbeweis zeigt $\neg B \Rightarrow \neg C$ direkt (unter der Generalvoraussetzung A).

Die Aussage, die so direkt gezeigt wird, lautet also "$\boxed{\begin{array}{l}\text{Vor.: } A \\ \text{Beh.: } \neg B \Rightarrow \neg C\end{array}}$"

und in Worten z. B.: Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Ist dann n nicht durch 3 teilbar, so kann $n^2 + 2$ keine Primzahl sein.
In der Form $A \wedge \neg B \Rightarrow \neg C$ wäre die Formulierung etwa so: Ist n eine nicht durch 3 teilbare natürliche Zahl größer als 1, dann kann $n^2 + 2$ keine Primzahl sein.
5. Einsetzen von Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ ergibt der Reihe nach die Zahlenbeispiele:

n	$n^2 + 2$
1	3 (Primzahl!)
2	6 (durch 3 teilbar)
3	11 (Primzahl!)
4	18 (durch 3 teilbar)
5	27 (durch 3 teilbar)
6	38
7	51 (durch 3 teilbar)
8	66 (durch 3 teilbar)
9	83 (Primzahl!)

usw. Dass bei Einsetzen einer durch 3 teilbaren Zahl für n nicht unbedingt eine Primzahl für n^2+2 herauskommen muss, zeigt das Beispiel $n = 6$. Es belegt, dass die Rückrichtung $B \Rightarrow C$ nicht stimmt, ist dafür also ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 3: Vorbilder: Beispiele für Beweisverfahren.

Welches Beweisverfahren wird in den folgenden Beweisen benutzt?
(Bem.: Das Zeichen $a \mid b$ heißt "a teilt b")
Vergleichen Sie die Beweise miteinander: Einmal rein äußerlich, andererseits auch inhaltlich: Wo wird direkt, wo indirekt argumentiert? (Wenn Sie nicht alles inhaltlich verstehen, ist das nicht so schlimm. Sie sollen hier nur Beispiele sehen, wie man logische Argumentationen "mathematisch" richtig aufschreiben kann.)

Satz 1: Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.
Beweis: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, etwa n, $n+1$, $n+2$, ist $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3 \cdot (n + 1)$, also durch drei teilbar. □

Lösung:

direkter Beweis

Satz 2: Vor.: a, b, c seien aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
Beh.: $3 \mid a + b + c$.
Bew.: Laut Vor. ist $b = a+1$ und $c = b+1 = (a+1)+1 = a+2$. Dann gilt: $a+b+c = a+(a+1)+(a+2) = 3a + 3 = 3 \cdot (a + 1) \Rightarrow 3 \mid a + b + c$. □

Lösung:

direkter Beweis, etwas formaler aufgeschrieben

Satz 3: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Beweis: Angenommen, es gäbe nur die endlich vielen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$. Dann ist die natürliche Zahl $n := p_1 \cdot p_2 \cdots p_r + 1$ durch keine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ teilbar. Da aber jede natürliche Zahl > 1 durch eine Primzahl (etwa der kleinste Teiler von n, der > 1 ist, vgl. Satz 4) teilbar sein muss, existiert noch eine weitere Primzahl, im Widerspruch zur Annahme. □

Lösung:

indirekter Beweis, die Annahme, die zum Widerspruch geführt wird, lautet "Es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$."

Satz 4: Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist durch eine Primzahl teilbar.
Bew.: Sei p der kleinste Teiler > 1, der n teilt. Dann ist p prim, denn wäre p zusammengesetzt aus zwei Faktoren $a, b > 1$, so wäre $a > 1$ ein Teiler von n, der kleiner ist als p, im Widerspruch zur Wahl von p. Also ist p prim. $\square$

Lösung:

direkter Beweis, welcher einen indirekten (Unter-)Beweis enthält für die Zwischenbehauptung "$p \mid n$, $p > 1$, p minimal $\Rightarrow$ p Primzahl.", beginnt im Text bei "denn wäre..."

Satz 5: Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Dann ist $\mathbb{P}$ unendlich groß.
Bew.: Ann.: $\mathbb{P} = \{p_1, \ldots, p_r\}$.
Betrachte $n := p_1 \cdots p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \ldots, p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$, und es gilt $p \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$, Widerspruch. $\square$
Bem.: Die Behauptung in Satz 4 ist auch als $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, p \in \mathbb{P} : p \mid n$ schreibbar.

Lösung:

derselbe Beweis wie in Satz 3, etwas formaler aufgeschrieben

Satz 6: Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Dann ist $\mathbb{P}$ unendlich groß.
Bew.: Wir konstruieren eine unendlich große Menge von Primzahlen wie folgt: Sei p_1 eine Primzahl, etwa $p_1 := 2$. Sind Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ gegeben, betrachte man $n := p_1 \cdots p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \ldots, p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$, und es gilt $p \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$, setze dann $p_{r+1} := p$. Auf diese Weise können unendlich viele Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ konstruiert werden. $\square$

Lösung:

direkter Beweis (durch Konstruktion)