

Lösungshinweise zum Übungsblatt Nr. 4, Besprechung am 20.9.2016

Aufgabe 1: Verständnis des Mengenbegriffs/Mengenverknüpfungen.

(i) Sei $U = \{1, 2, 3\}$ und $V = \{2, 4\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- | | | | |
|---------------------|----------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|
| (1) $U \subseteq V$ | (5) $\{2\} \subseteq V$ | (9) $\{2, \{2, 4\}\} \subseteq V$ | (13) $\emptyset \subseteq \emptyset$ |
| (2) $V \subseteq U$ | (6) $3 \in U$ | (10) $U \cap V = 3$ | (14) $\{1, 4\} \subseteq U \cup V$ |
| (3) $U = V$ | (7) $2 \subseteq V$ | (11) $V \setminus U = \{4\}$ | (15) $U \cap V \supseteq \{1, 2\}$ |
| (4) $U \neq V$ | (8) $\{2, 3\} \subseteq V$ | (12) $V \setminus U = \{1, 3\}$ | (16) $\{2\}^2 \subseteq U \times V$ |

(ii) Wieviele verschiedene Teilmengen hat die Menge $\{a, b, c\}$? Welche?

(iii) Beweisen Sie folgende Aussage: Für zwei beliebige Mengen A und B gilt
 $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Lösung:

Zu (i): (1)f (2)f (3)f (4)w (5)w (6)w (7)f (8)f (9)f (10)f (11)w (12)f (die Menge ist $U \setminus V$) (13)w: $\emptyset \subseteq \emptyset$ ist wahr, denn es gilt $\forall x \in \emptyset : x \in \emptyset$ bzw. $\forall x : (x \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset)$. Das ist stets wahr für alle x (aus irgendeiner beliebigen Grundmenge, die man sich denken kann), da die Voraussetzung $x \in \emptyset$ nie erfüllt sein kann, d. h. stets falsch ist. Und aus Falschem folgt immer Beliebiges. (14)w (15)f (16)w: Beachten $\{2\}^2 = \{2\} \times \{2\} = \{(2, 2)\}$.

Zu (ii): Wieviele verschiedene Teilmengen hat die Menge $\{a, b, c\}$? Welche?

Die Antwort lautet 8, wenn a, b, c alle paarweise verschieden sind, nämlich $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Die Antwort lautet 4, wenn die Menge aus zwei Elementen besteht, etwa o.B.d.A.¹ $\{a, b\}$, die Teilmengen sind dann $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$.

Die Antwort lautet 2, wenn $a = b = c$ ist, die Teilmengen sind dann $\emptyset$ und die einelementige Menge selbst.

Zu (iii): Vor.: A, B seien Mengen.

Beh.: Dann gilt $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Bew.: Wir zeigen die beiden Richtungen " $\Leftarrow$ " und " $\Rightarrow$ ".

Zu " $\Leftarrow$ ": Ist $A = B$, so folgt $A \cup B = A \cup A = A = A \cap A = A \cap B$, also $A \cup B = A \cap B$.

Zu " $\Rightarrow$ ": Es ist $A \subseteq A \cup B \stackrel{\text{Vor.}}{=} A \cap B \subseteq B$, woraus $A \subseteq B$ folgt und analog ist $B \subseteq A$. Somit ist $A = B$. □

¹Lassen Sie sich diese Abkürzung für "ohne Beschränkung der Allgemeinheit" von Ihrem Tutor/Ihrer Tutorin erklären! Eine andere gängige Abkürzung dafür ist o.E. für "ohne Einschränkung".

Hier noch eine andere Lösung für " $\Rightarrow$ " (es gibt sogar sehr viele Möglichkeiten, einen Beweis aufzuschreiben!): Bew.: Es gilt

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cap B \Rightarrow A \cup (A \cup B) = A \cup (A \cap B) \\ &\Rightarrow (A \cup A) \cup B = (A \cup A) \cap (A \cup B) \\ &\Rightarrow A \cup B = A \cap (A \cup B) \stackrel{\text{Nr. 8}}{=} A \Rightarrow A \cup B = A \end{aligned}$$

wobei Mengenverknüpfungsregel Nr. 8 verwendet wurde. Analog folgt aus der Voraussetzung auch $A \cup B = B$, also ist $A = A \cup B = B$. $\square$

Aufgabe 2: Negation von Aussagen mit Quantoren.

Formulieren Sie die Negation der folgenden Aussagen.

- (1) Hunde, die bellen, beißen nicht.
- (2) Nachts sind alle Katzen grau.
- (3) 2 ist die einzige gerade Primzahl.
- (4) Jede gerade Zahl > 2 ist Summe zweier Primzahlen.

Lösung:

- (1) Es gibt bellende Hunde, die beißen.
- (2) Wenn Sie die Aussage (2) verstehen als "Wenn es nachts ist, gilt: Alle Katzen sind grau.", dann lautet die Verneinung: "Wenn es nachts ist gilt: Es gibt Katzen, die nicht grau sind.", was kurz auch ausgedrückt werden kann als "Es gibt Katzen, die nachts nicht grau sind."
Wenn Sie die Aussage (2) verstehen als "In allen Nächten sind alle Katzen grau.", lautet die Verneinung "Es gibt Nächte, in denen es Katzen gibt, die nicht grau sind."
- (3) Es gibt (mind.) eine Primzahl außer 2, die gerade ist.
Formal: Die Aussage $\forall p \in \mathbb{P} : 2 \mid p \Rightarrow p = 2$ wird verneint zu $\exists p \in \mathbb{P} : (2 \mid p) \wedge (p \neq 2)$
- (4) Es gibt (mind.) eine gerade Zahl > 2 , die nicht die Summe zweier Primzahlen ist.
Formal: Die Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2 \mid n, n > 2 : (\exists p, q \in \mathbb{P} : n = p + q)$$

wird verneint zu

$$\exists n \in \mathbb{N}, 2 \mid n, n > 2 : (\forall p, q \in \mathbb{P} : n \neq p + q)$$

Beachten Sie hier, dass die ersten beiden Kommas hier wie "und" gelesen werden und auch durch das logische "und", d.h. $\wedge$ ersetzt können. Hiermit wird lediglich eine Einschränkung an die betrachteten $n \in \mathbb{N}$ vorgenommen, diese verändert sich durch die Verneinung nicht.

Aufgabe 3: Beweise von Aussagen mit Quantoren

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

Geben Sie Beweise dafür an, d.h. beweisen Sie die Aussagen, welche wahr sind, und widerlegen Sie die Aussagen, welche falsch sind.

Formulieren Sie jeweils auch die Negation der Aussagen (1)–(4).

- (1) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x < y^2$.
 (2) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x < y^2$.
 (3) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$.
 (4) $\forall x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Lösung:

Wir beweisen im folgenden: Es ist (1) w, (2) f, (3) f, (4) w.

Beh.: (1) ist wahr.

Bew.: Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $y := \sqrt{|x+1|} \in \mathbb{R}$ mit $y^2 = |x+1| = \max\{x+1, -x-1\} \geq x+1 > x$. $\square$

Beh.: (2) ist falsch.

Bew.: Wir zeigen, dass die Negation von (2) richtig ist, s.u.

Beh.: (3) ist falsch.

Bew.: Bew. mit einem Gegenbeispiel: Für $x := -2 \in \mathbb{R}$ ist $x^2 = 4 > 1$ und $x < 1$. $\square$

Beh.: (4) ist wahr.

Bew.: Es genügt, z.z.: $\forall y \in \mathbb{R} : y^2 > 0 \Leftrightarrow y \neq 0$, denn mit $y = x+1$ folgt daraus (4) wegen $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Zu " $\Rightarrow$ ": Ist $y = 0$, dann ist $y^2 = 0$ nicht positiv (das ist die Kontraposition von " $\Rightarrow$ ").

Zu " $\Leftarrow$ ": Ist $y \neq 0$, dann ist $y^2 = y \cdot y > y \cdot 0 = 0$ für $y > 0$ und ebenso $y^2 = y \cdot y > y \cdot 0 = 0$ für $y < 0$, weil sich bei der Multiplikation der Ungleichung $y < 0$ mit einer negativen Zahl das Vorzeichen umdreht. $\square$

Die Negationen lauten

$$\neg(1): \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \geq y^2.$$

$$\neg(2): \forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : x \geq y^2.$$

$$\neg(3): \exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1 \wedge x < 1.$$

$$\neg(4): \exists x \in \mathbb{R} : ((x+1)^2 > 0 \wedge x = -1) \vee ((x+1)^2 \leq 0 \wedge x \neq -1), \text{ wobei die Aussage äquivalent ist zu } ((x+1)^2 \leq 0 \wedge x \neq -1).$$

Beweis zu $\neg(2)$: Sei $x := y^2$, dann ist $x = y^2 \geq y^2$. $\square$