Lösungshinweise zum Übungsblatt Nr. 5, Besprechung am 22.9.2016

Aufgabe 1: Vollständige Induktion.

Zeigen Sie die folgenden Sätze mit vollständiger Induktion:

$$(a) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

$$(b) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}: \ 1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + 3 \cdot (3!) + \cdots + n \cdot (n!) = (n+1)! - 1.$$

Lösung:

Zu (a): Induktionsanfang: $n = 1$. Dann ist

$$\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1},$$

also die Behauptung wahr für $n = 1$.

Induktionsschritt von n nach $n+1$: Induktionsannahme: Sei die Behauptung wahr für eine natürliche Zahl n. Dann ist sie auch für $n+1$ richtig, weil

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&\overset{\text{Ind.vor.}}{=} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{2(n+2) - (n+1)}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

□

Zu (b): Induktionsanfang: $n = 1$. Dann ist

$$1 \cdot (1!) = (1+1)! - 1,$$

also die Behauptung wahr für $n = 1$.

Induktionsschritt von n nach $n+1$: Induktionsannahme: Sei die Behauptung wahr für eine natürliche Zahl n. Dann ist sie auch für $n+1$ richtig, weil

$$\begin{aligned}
&1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + 3 \cdot (3!) + \cdots + n \cdot (n!) + (n+1) \cdot ((n+1)!) \\
&\overset{\text{Ind.vor.}}{=} ((n+1)! - 1) + (n+1) \cdot ((n+1)!) \\
&= (1 + n + 1) \cdot (n+1)! - 1 \\
&= ((n+1) + 1)! - 1.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2: Noch mehr vollständige Induktion.

Zeigen Sie:

(a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist $3n^2 > (n+1)^2$.

(b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist $3^n > n^2$.

(c) Zeigen Sie, dass für $n \geq 4$ die Ungleichung $n! > n^2$ gilt.

Zusatzfrage: Kann die Aussage von Aufgabe 1 auf Übungsblatt 3 mit einer Induktion bewiesen werden?

Lösung:

Zu (a):

$\underline{n = 2}$: $3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12 > 9 = 3^2 = (2+1)^2$.

$\underline{n \to n+1}$: Ist die Beh. für n wahr, dann auch für $n+1$, weil

$$\begin{aligned} 3(n+1)^2 &= 3n^2 + 6n + 3 \overset{\text{Ind.Vor.}}{>} (n+1)^2 + 6n + 3 \\ &= (n+2-1)^2 + 6n + 3 = (n+2)^2 - 2(n+2) + 1 + 6n + 3 \\ &= (n+2)^2 + 4n > (n+2)^2 = ((n+1)+1)^2. \end{aligned}$$

$\square$

Zu (b):

$\underline{n = 2}$: $3^2 = 9 > 4 = 2^2$.

$\underline{n \to n+1}$: Ist die Beh. für n wahr, dann auch für $n+1$, weil

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \overset{\text{Ind.Vor.}}{>} 3n^2 \overset{(a)}{>} (n+1)^2.$$

$\square$

Zu (c):

$\underline{n = 4}$: $4! = 24 > 4^2 = 16$.

$\underline{n \to n+1}$: Ist die Beh. für n wahr, dann auch für $n+1$, weil

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)n^2 \overset{n+1>3}{>} 3n^2 = n^2 + n^2 + n^2 \overset{n>2}{>} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

$\square$

Zur Zusatzfrage: Nein, die Aussage der Aufgabe 1 von Übungsblatt 3 mit einer Induktion zu zeigen würde wohl nicht zum Ziel führen.

Aufgabe 3: Schriftlicher Beweis

Zeigen Sie:

(A) $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdots (4n-2) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

(B) Jede zusammengesetzte natürliche Zahl n besitzt einen Primteiler p mit $p \leq \sqrt{n}$.

Lösung:

Zu (A): Vorbereitung: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$, also ist $(2n)! = 1 \cdot 2 \cdots 3 \cdots (2n-1) \cdot (2n) = n! \cdot (n+1)(n+2) \cdots (2n)$.

1. Lösung mit vollständiger Induktion:

Beweis (durch vollständige Induktion):

Induktionsanfang: Sei $n = 1$, dann gilt $2 = \frac{(2 \cdot 1)!}{1!}$ richtig, denn die rechte Seite ist $\frac{2}{1} = 2$.

Induktionsschritt: Sei die Formel richtig für eine natürliche Zahl n (Induktionsvoraussetzung). Dann gilt sie auch für $n+1$ (Induktionsschritt), denn dann gilt

$$\underbrace{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}_{=(2n)!/n! \text{ nach Ind.vor.}} \cdot \underbrace{(4(n+1)-2)}_{=4n+2} = \frac{(2n)!}{n!}(4n+2)$$

$$= \frac{(2n)!(n+1) \cdot 2(2n+1)}{n!(n+1)} = \frac{(2n)!(2n+2)(2n+1)}{(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!}. \quad \square$$

2. Lösung mit direktem Beweis, ohne vollständiger Induktion:

Sei $L(n)$ der Ausdruck auf der linken Seite der Behauptung, die Behauptung lautet dann: $\forall n \in \mathbb{N} : n!L(n) = (2n)!$, die wir nun zeigen.

Diese gilt, denn paaren wir jeden Faktor in $L(n)$ der Reihe nach mit den Faktoren in $n!$, erhalten wir

$$L(n)n! = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdots (4n-2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = (2 \cdot 1) \cdot (6 \cdot 2) \cdot (10 \cdot 3) \cdots ((4n-2) \cdot n).$$

Nehmen wir hier in jedem Paar den Faktor 2 der linken Komponente zur rechten Komponente des Paars, erhalten wir weiter

$$L(n)n! = (1 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 6) \cdots ((2n-1) \cdot 2n) = (2n)!. \quad \square$$

3. Lösung mit demselben Beweis, aufgeschrieben mit dem Produktzeichen:

Es ist

$$L(n)n! = \prod_{k=1}^{n}(4k-2)\prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=1}^{n}(4k-2)k = \prod_{k=1}^{n}(2k-1) \cdot 2k = \prod_{m=1}^{2n} m = (2n)!. \quad \square$$

Man kann den letzten Schritt noch ausführlicher schreiben:

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) \cdot 2k = \prod_{k=1}^{n}\ \prod_{m=2k-1}^{2k} m = \prod_{k=1}^{2n} m = (2n)!.$$

Zu (B):

Vorbereitung: Erinnerung an die Definitionen:

Def. 1: $n \in \mathbb{N}$ heißt *zusammengesetzt*, falls $n > 1$ und n keine Primzahl ist.

Def. 2: $n \in \mathbb{N}_{>1}$ heißt *Primzahl*, falls $\forall t \in \mathbb{N} : \ t \mid n \Rightarrow t = 1 \vee t = n$

Def. 3: $p \in \mathbb{N}$ heißt *Primteiler* von $n \in \mathbb{N}$, falls $p \mid n$ und p eine Primzahl ist.

Def. 4: Die Menge der Primzahlen wird mit $\mathbb{P}$ bezeichnet, also $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$.

Beh.: Jede zusammengesetzte natürliche Zahl n besitzt einen Primteiler p mit $p \leq \sqrt{n}$.

Etwas formaler: $\forall\, n \in \mathbb{N}, n > 1, n \notin \mathbb{P}\ \exists\, p \in \mathbb{P} : p \mid n \wedge p \leq \sqrt{n}$

Lösung mit Widerspruchsbeweis:

Beweis (durch Widerspruch):

1. Angenommen, eine bestimmte natürliche Zahl n habe keinen Primteiler p mit $p \leq \sqrt{n}$, d. h. jeder Primteiler von n sei größer als $\sqrt{n}$.

2. Jede Zahl $n > 1$ besitzt immer einen Primteiler, z. B. den kleinsten Teiler von n, der > 1 ist.

Da $n > 1$ ist und keine Primzahl, gilt für einen Primteiler p von n, dass $n/p > 1$. Somit hat auch n/p einen Primteiler, nennen wir ihn q (welcher nicht notwendig von p verschieden sein muss). Laut Annahme sind diese Primteiler p bzw. q von n beide größer als $\sqrt{n}$.

Aus $q \mid n/p$ folgt $pq \mid n$, also gilt $n = \sqrt{n}\sqrt{n} < pq \leq n$.

3. Daraus folgt $n < n$, ein Widerspruch. Daher war die Annahme falsch. $\square$

Derselbe Beweis, etwas formaler:

Beweis (durch Widerspruch):

1. Annahme: $\exists\, n \in \mathbb{N}, n > 1, n \notin \mathbb{P}\ \forall\, p \in \mathbb{P} : p \nmid n \vee p > \sqrt{n}$, was umformuliert werden kann zu $\exists\, n \in \mathbb{N}, n > 1, n \notin \mathbb{P}\ \forall\, p \in \mathbb{P} : p \mid n \Rightarrow p > \sqrt{n}$.

2. Es gilt: $\forall\, m \in \mathbb{N}_{>1}\ \exists\, p \in \mathbb{P} : p \mid m$.

Dies zeigt $\exists\, p \in \mathbb{P} : p \mid n$ und $\exists\, q \in \mathbb{P} : q \mid \frac{n}{p}$.

Es folgt: $pq \mid n$, also $pq \leq n$. Dies zeigt, dass $n = \sqrt{n}\sqrt{n} < pq \leq n$ gilt.

3. Also folgt $n < n$, ein Widerspruch. $\square$

1. Bemerkung: Ein Ansatz mit Induktion oder direkt wird hier nicht zu einem Beweis führen.

2. Bemerkung: Die Behauptung ist die Grundlage für das *Sieb des Eratosthenes*: Möchte man prüfen, ob n eine Primzahl ist, testet man alle Primzahlen $p \leq \sqrt{n}$, ob sie Teiler von n sind. Ist dies nicht der Fall, ist n eine Primzahl (das ist die Kontraposition der Behauptung). Deswegen ist z. B. 101 eine Primzahl, weil sie nicht durch $2, 3, 5$ oder $7 < \sqrt{101} \approx 10$ teilbar ist.