

Lösungshinweise zum Übungsblatt Nr. 6, Besprechung am 27.9.2016

Aufgabe 1: Logik der Definition eines teilerfremden Zahlenpaares.

(a) Im Skript wurde durch die Aussage

$$\forall c \in \mathbb{N} : c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c = 1$$

definiert, dass zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ *teilerfremd* sind. Wie kann man diese Aussage rein sprachlich ausdrücken? Schreiben Sie die formale Verneinung der Aussage auf und drücken Sie diese ebenfalls sprachlich aus.

Denken Sie daran, dass " $c \mid a$ " und " $c \mid b$ " ebenfalls Abkürzungen für Aussagen sind; diese enthalten einen Existenzquantor. Wenn man diese Aussagen dann in die Definition einsetzt, wie lautet dann die formale Verneinung und ihre sprachliche Umsetzung?

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Zahlen $n! + 1$ und $(n + 1)! + 1$ teilerfremd.

Lösung:

Zu (a): Die Aussage " $\forall c \in \mathbb{N} : (c \mid a \wedge c \mid b) \Rightarrow c = 1$ " bedeutet: "Jede natürliche Zahl c , die a und b teilt, ist (notwendigerweise) gleich 1."

Gleichwertig/äquivalent: " $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \neg(c \mid a) \vee \neg(c \mid b)$ ", in Worten: "Jede natürliche Zahl $c \neq 1$ teilt a nicht oder b nicht."

Formale Verneinung:

$$\begin{aligned} & \exists c \in \mathbb{N} : \neg((c \mid a \wedge c \mid b) \Rightarrow c = 1) \\ \Leftrightarrow & \exists c \in \mathbb{N} : (c \mid a \wedge c \mid b) \wedge c \neq 1 \\ \Leftrightarrow & \exists c \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : c \mid a \wedge c \mid b, \end{aligned}$$

in Worten: "Es gibt eine natürliche Zahl $c \neq 1$, die a und b teilt." Die Verneinung: "Es gibt keine natürliche Zahl $c \neq 1$, die a und b teilt", ist wieder gleichwertig zur Ursprungsaussage.

Wir hatten: $c \mid a \Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{Z} : a = cd$,

entsprechend $c \mid b \Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{Z} : b = ce$.

Eingesetzt: $\forall c \in \mathbb{N} : (\exists d \in \mathbb{Z} : a = cd) \wedge (\exists e \in \mathbb{Z} : b = ce) \Rightarrow c = 1$.

Verneinung:

$$\begin{aligned} & \exists c \in \mathbb{N} : (\exists d \in \mathbb{Z} : a = cd) \wedge (\exists e \in \mathbb{Z} : b = ce) \wedge (c \neq 1) \\ \Leftrightarrow & \exists c \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \exists d \in \mathbb{Z} \exists e \in \mathbb{Z} : a = cd \wedge b = ce. \end{aligned}$$

In Worten: "Es gibt eine natürliche Zahl $c \neq 1$, eine ganze Zahl d und eine ganze Zahl e mit $a = cd$ und $b = ce$."

Auch möglich: "Es gibt eine natürliche Zahl $c \neq 1$, eine ganze Zahl d und eine ganze Zahl e , so dass die Gleichungen $a = cd$ und $b = ce$ gelten."

Zu (b): Beh.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Zahlen $n! + 1$ und $(n + 1)! + 1$ teilerfremd, d. h. $\forall n \in \mathbb{N} \forall c \in \mathbb{N} : c \mid n! + 1 \wedge c \mid (n + 1)! + 1 \Rightarrow c = 1$

Beweis (direkt): Sei $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{N}$ mit $c \mid n! + 1$ und $c \mid (n+1)! + 1$. Dann gibt es $d \in \mathbb{Z}$ und $e \in \mathbb{Z}$ mit $ce = n! + 1$ und $cd = (n+1)! + 1$. Es folgt

$$cd = (n+1)! + 1 = (n+1)n! + 1 = (n+1)(n! + 1) - (n+1) + 1 = (n+1)(n! + 1) - n = (n+1)ce - n,$$

also $c(d - e(n+1)) = n$. Somit ist c ein Teiler von n , und dann auch von $ce - n! = 1$. Dann ist auch $c = 1$, denn der einzige natürliche Teiler von 1 ist die 1. $\square$

Aufgabe 2: Vereinigung reeller Intervalle.

Schreiben Sie die folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von Intervallen und beweisen Sie Ihre Behauptung:

$$A := \{x \in \mathbb{R}; |x| < 2\},$$

$$B := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 3\},$$

$$C := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; |2x - 3| \geq 0.5\},$$

$$D := \{x \in \mathbb{R}; x^2 < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R}; |x - 2| \leq 3\},$$

$$E := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; (x - 1)^2 \geq 2\}.$$

Lösung:

Zu A: Es ist $A = (-2, 2)$, da $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Zu B: Es ist $B = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$, denn:

$$x \in B \Leftrightarrow \neg(|x| \leq 3) \Leftrightarrow \neg(-3 \leq x \leq 3) \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \vee x \in (3, \infty).$$

Zu C: Es ist $C = (1.25, 1.75)$, denn:

$$x \in C \Leftrightarrow \neg(|2x - 3| \geq 0.5) \Leftrightarrow |2x - 3| < 0.5 \Leftrightarrow -0.5 < 2x - 3 < 0.5 \Leftrightarrow x > 1.25 \wedge x < 1.75.$$

Zu D: Es ist $D = [-1, 2)$, denn:

$$x \in D \Leftrightarrow x^2 < 4 \wedge |x - 2| \leq 3 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \wedge -3 \leq x - 2 \leq 3 \Leftrightarrow x \in (-2, 2) \cap [-1, 5] = [-1, 2).$$

Zu E: Es ist $E = (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, denn:

$$x \in E \Leftrightarrow (x - 1)^2 < 2 \Leftrightarrow |x - 1| < \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x - 1 < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}.$$

Bemerkung: Ein beliebiger Fehler ist es, nach dem Wurzelziehen eines Quadrats den Betrag zu vergessen. Dass $\sqrt{x^2} = |x|$ ist für alle reellen x , sollte man sich unbedingt merken.

Aufgabe 3: Zurückführen auf bekannte Rechenregeln.

Gegeben sind die folgenden Regeln (1) bis (4) zum Rechnen mit der Ordnungsrelation $<$ in R , wobei $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ gegeben sei mit den üblichen Rechenoperationen $+$ und $\cdot$, wie im Skript VK4 angegeben.

- (1) $\forall a, b \in R: a < b \vee a = b \vee b < a$, wobei keine zwei der drei Alternativen gleichzeitig wahr sein können,
- (2) $\forall a, b, c \in R: a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
- (3) $\forall a, b, c \in R: a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- (4) $\forall a, b, c \in R: a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

Leiten Sie die folgenden beiden Rechenregeln zum Rechnen in R her:

$$(A) \quad \forall b \in R: b < 0 \Leftrightarrow -b > 0$$

$$(B) \quad \forall a, b \in R: a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

(Verwenden dürfen Sie die obigen Regeln (1) bis (4), alle bekannten Rechenregeln zu $+$ und $\cdot$ (die auf Seite 7 in VK4_a.pdf) und die Regeln 1.–3. auf Seite 5 der Vorlesungsnotizen vom 20. September. Für eine der beiden Regeln kann auch die andere benutzt werden, wenn Sie diese schon hergeleitet haben.)

Lösungshinweis für (B): Führen Sie alle möglichen Fälle mit $a > 0$, $a < 0$, $b > 0$, $b < 0$ mit Regel (4) zum Widerspruch gegen Regel (1).

Lösung:

Zu (A): Es gilt

$$\begin{aligned} b < 0 &\Rightarrow b + (-b) < 0 + (-b) \text{ nach Regel (3),} \\ &\Rightarrow 0 < -b, \text{ da } b + (-b) = 0 \text{ und } 0 + (-b) = -b. \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt

$$\begin{aligned} -b > 0 &\Rightarrow (-b) + b > 0 + b \text{ nach Regel (3),} \\ &\Rightarrow 0 > b, \text{ da } (-b) + b = 0 \text{ und } 0 + b = b. \end{aligned}$$

□

Zu (B): Wir führen einen Beweis mit Widerspruch.

Angenommen, die Behauptung sei falsch, d.h. es gelte $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Wegen Regel (1) gibt es dann genau diese vier Fälle:

Fall 1: $a > 0 \wedge b > 0$,

Fall 2: $a < 0 \wedge b > 0$,

Fall 3: $a > 0 \wedge b < 0$,

Fall 4: $a < 0 \wedge b < 0$.

In jedem der vier Fälle leiten wir nun aus der Voraussetzung $a \cdot b = 0$ einen Widerspruch her:

In Fall 1: Mit Regel (4) folgt $0 = a \cdot b > 0 \cdot b = 0$ (laut Regel 3. der Vorlesungsnotiz) im Widerspruch zu Regel (1).

In Fall 2: Mit Regel (4) folgt $0 = a \cdot b < 0 \cdot b = 0$ (laut Regel 3. der Vorlesungsnotiz) im Widerspruch zu Regel (1).

Für die anderen beiden Fälle beachten wir, dass $-b > 0$ ist für $b < 0$ wegen oben bewiesener Regel (A). Weiter ist $a \cdot (-b) = (-1) \cdot a \cdot b$ wegen Regel 2. der Vorlesungsnotiz. Es folgt:

In Fall 3: Es gilt $0 \stackrel{3.}{=} (-1) \cdot 0 \stackrel{\text{Vor.}}{=} (-1) \cdot a \cdot b \stackrel{2.}{=} a \cdot (-b) \stackrel{(4), \text{ da } a, -b > 0}{>} 0 \cdot (-b) \stackrel{3.}{=} 0$ im Widerspruch zu Regel (1).

In Fall 4: Es gilt $0 \stackrel{3.}{=} (-1) \cdot 0 \stackrel{\text{Vor.}}{=} (-1) \cdot a \cdot b \stackrel{2.}{=} a \cdot (-b) \stackrel{(4), \text{ da } -b > 0 > a}{<} 0 \cdot (-b) \stackrel{3.}{=} 0$ im Widerspruch zu Regel (1).

□