Notizen vom 13. Sept.:

VK0: Abstrakt $\leftrightarrow$ Konkret,
Was ist Mathematik? $\rightsquigarrow$ Axiomatik
VK1: Aussagenlogik: $A, B, C, \dots$ stehen für einsetzbare Aussage

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
w	w	w	w	w	w	f
w	f	f	w	f	f	f
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	f	w	w	w

$A \Rightarrow B$: $\neg A \vee B$

Logikregeln:

(1) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

(2) $\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

(3) $\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(4) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ Kontrapositionsregel

Satz: $((A_1 \wedge A_2) \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B))$.

Bew.: $((A_1 \wedge A_2) \Rightarrow B) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (\neg (A_1 \wedge A_2) \vee B)$

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \neg A_1 \vee (\neg A_2 \vee B) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \neg A_1 \vee (A_2 \Rightarrow B)$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B)$. $\square$

VK2: Mathematische Beweise

Teil 1: Formulierung eines mathematischen Satzes:

Satz: $\underbrace{A}_{\text{Voraussetzung}} \Rightarrow \underbrace{B}_{\text{Behauptung}}$

"Vor." "Beh."

Bsp.:

- **Satz:** Eine beliebige gerade Quadratzahl ist durch 4 teilbar.
- **Satz:** Vor.: n sei eine gerade Quadratzahl
  Beh.: n ist durch 4 teilbar.

☒ **Satz:** • 10 ist die einzige Potenz von 10, die nicht durch 4 teilbar ist.

$(A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B)$ • Vor.: Sei 10^k für eine natürliche Zahl k nicht durch 4 teilbar.
Beh.: Dann ist $k = 1$.

$(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B))$ • Sei k eine nat. Zahl. Ist 10^k nicht durch 4 teilbar, dann ist $k = 1$.

Teil 2: Beweis des Satzes $A \Rightarrow B$:

1. direkter Beweis → Angabe einer Schlusskette $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$.
   → Vollständige Induktion, s. VK4.
2. indirekter Beweis → Kontrapositionsbeweis d.h. direkter Beweis von $\neg B \Rightarrow \neg A$
   Widerspruchsbeweis

<u>Widerspruchsbeweis</u>: direkter Beweis von $\underline{A \wedge \neg B \Rightarrow C}$,
wobei C eine offensichtlich falsche Aussage ist
wie z.B. $0=1$.

$$\left[(A \wedge \neg B \Rightarrow \underbrace{C}_{f}) \Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow \neg(A \wedge \neg B))\right.$$
$$\Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow (\neg A \vee B))$$
$$\left.\Leftrightarrow (\underbrace{\neg C}_{w} \Rightarrow \underbrace{(A \Rightarrow B)}_{w})\right]$$

Wid.-beweis: Herleitung eines Widerspruchs C
aus der <u>Annahme</u> $\neg B$
("angenommen, B gelte nicht",
"B wäre falsch", ...)

- Kennzeichnen eines Beweisendes mit
  $\square$, qed für "quod erat demonstrandum",
  wzbw für "was zu beweisen war"

<u>Bsp. 7:</u> Satz: $A \to$ Vor.: Sei k eine beliebige nat. Zahl,
die ≥ 2 ist, und sei $n = 10^k - 1$.
$B \to$ Beh.: Dann ist n keine Quadratzahl.
M.a.W.: Die Zahlen 99, 999, 9999, ... sind keine Quadratzahlen.
. Unter den Zahlen $9, 99, 999, \dots$ ist 9 die einzige $\square$ Zahl.

Beweis (durch Widerspruch): <u>Angenommen</u>, n wäre (doch) Quadratzahl.
Da $n = 10^k - 1$ ungerade ist, ist n eine ungerade $\square$ Zahl.
<u>Nach</u> ⊛: Ungerade $\square$ Zahlen sind von der Form $4m+1$ für
ein $m \in \mathbb{N}_0$, also ist $10^k - 1 = 4m+1$, also $10^k = 4m+2$,
also ist 10^k nicht durch 4 teilbar. Nach Satz $\boxtimes$ folgt $\underline{k=1}$.
Dies widerspricht der Vor. $k \geq 2$, ↯. $\square$

Satz ⊛:

Ungerade □-Zahlen sind von der Form $4m+1$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: (direkt) Sei $n = k^2$ und k ungerade, d.h. $k = 2r+1$ mit $r \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist $n = (2r+1)^2 = 4r^2 + 4r + 1$

$= 4(r^2+r) + 1 = 4m+1$,

mit $m = r^2 + r$. □

Satz ⊠:

A → Vor.: Sei 10^k für eine natürliche Zahl k nicht durch 4 teilbar.

B → Beh.: Dann ist $k = 1$.

Beweis (durch Kontraposition) $(\neg B \Rightarrow \neg A)$:

$k \neq 1 \Rightarrow k \geq 2 \Rightarrow 10^k = 2^k \cdot 5^k = \underbrace{2^2}_{=4} \cdot \underbrace{2^{k-2} \cdot 5^k}_{\in \mathbb{N}}$

ist durch 4 teilbar. □