Notizen vom 20. Sept. 2016

VK4: Zahlbereiche: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{N}$: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$+, \cdot \rightsquigarrow$ Rechenregeln

Erklärung der 0 durch: $n + 0 = n = 0 + n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
$\rightsquigarrow 0$ ist "neutrales El." bzgl. $+$

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, \dots\}$$

Peano-Axiome beschreiben $\mathbb{N}$.

5. Axiom / Prinzip der vollständigen Induktion:

$$\forall \underbrace{E(x)}_{\text{bel. Aussage über Zahl } x} : \quad \underbrace{\Big(\overbrace{E(1)}^{(1)} \wedge \overbrace{\forall n \in \mathbb{N} : E(n) \Rightarrow E(n+1)}^{(2)} \Big)}_{} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : E(n)$$

Somit: $\underbrace{E(1)}_{\text{wg. (1)}} \Rightarrow \underbrace{E(2)}_{\text{wg. (2)}} \Rightarrow \underbrace{E(3)}_{\text{wg (2)}} \Rightarrow E(4) \Rightarrow \dots$

$\rightsquigarrow$ Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion liefert Beweismethode für Sätze der Art
"$\forall n \in \mathbb{N} : E(n)$"

Bsp.: Satz: $\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{n \leq 2^n}_{E(n)}$

Beweis durch vollst. Induktion:

Ind. anfang → "$E(1)$": $n=1$: $1 \leq 2^1$ ✓

Ind. schritt → "$\underbrace{E(n)}_{\text{Vor.}} \Rightarrow \underbrace{E(n+1)}_{\text{Beh.}}$": Sei $E(n)$ richtig, d.h. $n \leq 2^n$ sei wahr.

Dann

$$n+1 \leq 2^n + 1 \leq 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Also ist $E(n+1)$ richtig.

$\square$

Satz (von der vollständige Induktion):

Vor.: Sei E eine Aussage über nat. Zahlen wie folgt:

(1) Die Aussage gilt für die nat. Zahl 1, d.h. $E(1)$ wahr.

(2) Gilt die Aussage E für die nat. Zahl n, dann auch für $n+1$, d.h. $E(n) \Rightarrow E(n+1)$.

Beh.: E gilt für alle natürlichen Zahlen.

Aufschreiben eines Beweises mit vollst. Induktion:

1. Formulierung eines Beweis von $E(1)$ als "Induktionsanfang: $n=1$ ....."
2. Formulierung eines Beweis von $E(n) \Rightarrow E(n+1)$ als "Induktionsschritt: $n \to n+1$ ..."
   2a) d.h. unter der Voraussetzung/Annahme, dass $E(n)$ gelte ("Induktionsannahme/Ind. Vor."),
   2b) wird die Beh. $E(n+1)$ hergeleitet/bewiesen ("Dann gilt auch $E(n+1)$, weil ...")
3. Feststellung, dass der Beweis zuende ist. "Also gilt $E(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. qed"

Bsp.: Satz: $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2.$$

$$\left[\begin{array}{r} 1 = 1^2 \\ 1+3 = 2^2 \\ 1+3+5 = 3^2 \\ 1+3+5+7 = 4^2 \\ \vdots \end{array}\right]$$

Beweis (durch vollst. Induktion):

Induktionsanfang: Sei $n=1$, dann ist $1 = 1^2$ richtig ✓.

Induktionsschritt:

Induktionsvor.: Sei die Formel wahr für ein $n \in \mathbb{N}$,
d.h. $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$. ←

Dann gilt die Formel auch für $n+1$, weil
$$\underbrace{1+3+5+\dots+(2n-1)}_{= n^2 \text{ nach Ind.vor.}} + (2(n+1)-1)$$
$$= n^2 + 2n + 1 \overset{\text{bin. Formel}}{=} (n+1)^2. \qquad \square$$

Kürzer: '$n=1$': $l.S. = 1 = 1^2 = r.S.$ ✓
'$n \rightsquigarrow n+1$': $l.S.(n+1) = \underbrace{1+3+\dots+(2n-1)}_{n^2} + \underbrace{(2(n+1)-1)}_{+2n+1} \overset{\text{Ind. vor.}}{=} \dots = (n+1)^2. \quad \square$

Bsp.: Satz (vom Kleinen Gauß):

$$1+2+3+\dots+98+99+100$$
$\to 101$, $\to 101$, $\to 101$

$50 \cdot 101 = 5050$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis (durch vollst. Ind.):

Induktionsanfang: Sei $n=1$, dann $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ ✓

Ind. Schritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Dann gilt die Formel auch für $n+1$, denn

$$
\begin{aligned}
\text{l.S.}(n+1) &= \underbrace{1+2+\dots+n}_{} + (n+1) \\
&\overset{\text{Ind.vor.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right) \\
&= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \text{r.S.}(n+1).
\end{aligned}
$$

$\square$

Bsp.: Beh.: $\forall n \geq 4: \; 2^n \geq n^2$

Bew. (mit vollst. Ind.):

I. Anf.: $n=4$: $2^4 \geq 4^2$ ✓

I. Schritt: $n \rightsquigarrow n+1$: Angen., die Unglg. gelte für $n \geq 4$.

$$2^{n+1} = 2\cdot 2^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ind. vor.}}}{\geq} 2\cdot n^2 \underset{\uparrow}{\geq} n^2+2n+1 = (n+1)^2.$$

$\square$

$\Leftrightarrow n^2 \geq 2n+1$

$\Leftrightarrow n(n-2) \geq 1$ ✓

ist richtig für $n \geq 3$

$\mathbb{N}$: $+, \cdot, \leq$

$n \in \mathbb{N}$

Darstellung nat. Zahlen:

- endlichen Ziffernfolgen im 10er System
  $463.928 = \dots$?
- Angabe der Zerlegung in Primfaktoren

$\underline{\underline{\mathbb{Z}}}$: • Erkläre $n-m$ als die Zahl k mit $m+k=n$

Sei $m \in \mathbb{N}$.

Def.: $-m := 0-m$,

d.h. $m+(-m)=0$.

$\rightsquigarrow \mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-m;\ m \in \mathbb{N}\}$ Menge der ganzen Zahlen

Dann:

$$\forall m,n \in \mathbb{Z}\ \exists k \in \mathbb{Z}: m+k=n,$$

insb.: $m + \underbrace{(-m)}_{\text{Inverses von } m \text{ bzgl. } +} = 0.$

1. Regel: $\forall a \in \mathbb{Z}: a \cdot 0 = 0$

Bew.: $a + a\cdot 0 = a\cdot 1 + a\cdot 0 \overset{D.}{=} a\cdot(1+0)$

$= a\cdot 1 = a$

$\Rightarrow \quad a\cdot 0 = 0.$ $\square$

2. Regel: $\forall m \in \mathbb{Z}: (-1)\cdot m = -m$

Bew.: $0 \underset{1.}{=} 0\cdot m = (1+(-1))\cdot m \overset{D.}{=} 1\cdot m + (-1)\cdot m$

$= \underline{\underline{m + (-1)\cdot m}}$

$\Rightarrow (-1)\cdot m = -m.$ $\square$

3. Regel: $(-1)\cdot(-1) = 1$

Bew.: $0 = 0\cdot(-1) = (1+(-1))\cdot(-1) \overset{D.}{=} 1\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1)$

$\underset{2.}{=} -1 + (-1)\cdot(-1)$,

also ist

$1 = 1 + \overset{\sim}{0} = 1 \overbrace{-1 + (-1)\cdot(-1)} = 0 + (-1)\cdot(-1) = (-1)\cdot(-1).$ $\square$

(Schräger Bruchstrich)

$\underline{\underline{\mathbb{Q}}}$: • Erkläre n/m für $m \neq 0$
als die Zahl k mit $m \cdot k = n$
(mit $k \in \mathbb{Z}$, falls $m \mid n$)

• $\mathbb{Q} = \{ \frac{z}{n} ; \ z \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N} \}$ Menge der rationalen Zahlen bzw. Bruchzahlen

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, denn $z \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow z = \frac{z}{1}$

Problem: Darstellung $\frac{z}{n}$ ist nicht eind.: $\frac{z}{n} = \frac{k \cdot z}{k \cdot n}$

$\rightsquigarrow \frac{z}{n} = z \cdot \frac{1}{n}$,

$\frac{1}{0}$ ex. nicht! Weil: $a \cdot 0 = 1$ ist nicht lösbar mit $a \in \mathbb{Q}$,
denn: $\forall a \in \mathbb{Q} : a \cdot 0 = 0 \neq 1$.

Def.: • $\frac{n}{m} = \frac{u}{v} :\Leftrightarrow nv = um$

• $\frac{n}{m}$ heißt <u>gekürzt</u>, falls $\forall k \in \mathbb{N}$:
$k \mid m \wedge k \mid n \Rightarrow k = 1$.

<u>Satz</u>: Die Darstellung einer rationalen Zahl $r \in \mathbb{Q}$ ist als gekürzter Bruch möglich. Diese ist eindeutig.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ bildet <u>Körper</u>.

$\rightsquigarrow$ Erklärung von $\leq$ auf $\mathbb{Q}$:
$\frac{a}{b} \leq \frac{u}{v} :\Leftrightarrow av \leq ub$ ✓

0,4 $\rightsquigarrow$ $\frac{2}{5}$ < 0.571... $\rightsquigarrow$ $\frac{4}{7}$?
$2 \cdot 7 < 4 \cdot 5$ ✓

Größenvergleiche leichter, wenn rationale Zahlen als Dezimalbrüche geg. sind.

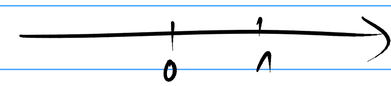
Dezimalbruch: $\pm \underbrace{a_k a_{k-1} \dots a_0}_{\text{Vorkommastellen}} , \underbrace{b_0 b_1 b_2 \dots}_{\text{Nachkommastellen}}$

Bsp.: $0,45\ldots$

- Dezimalbrüche rationaler Zahlen brechen ab oder sind periodisch
- Dezimalbruchdarstellungen sind nicht eind.:

$$0,99999\ldots \underset{\text{Beweis später}}{=} 1,0000\ldots$$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{R}$:



Nachtrag für die Übungen:

1) $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, sprich "$n$ Fakultät",
   somit ist $(n+1)! = (n!) \cdot (n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   speziell: $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 6 \cdot 4 = 24, \ldots$

2) $n \in \mathbb{N}$ heißt zusammengesetzt, falls $n > 1$ und n keine Primzahl ist.
   $n \in \mathbb{N}_{>1}$ heißt Primzahl, falls $\forall t \in \mathbb{N}: t \mid n \Rightarrow t = 1 \vee t = n$
   $p \in \mathbb{N}$ heißt Primteiler von n, falls $p \mid n$ und p Primzahl ist.