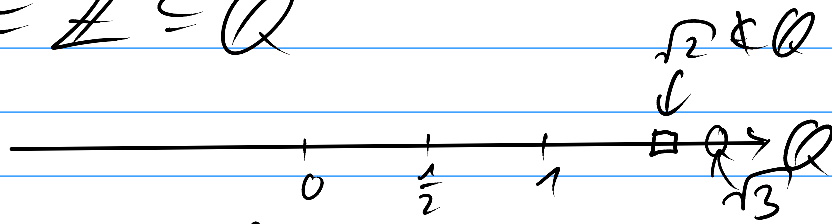
Notizen vom 22. Sept. 2016:

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$



$ax = b \rightsquigarrow x = \frac{b}{a}$, falls $a, b \in \mathbb{N}$

- Auflösen von Gleichungen wie $x^2 = 2$ nach x ist problematisch in $\mathbb{Q}$!

Satz: Die Glg. $x^2 = 2$ hat keine Lösung $x \in \mathbb{Q}$. ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

Bew.: (durch Widerspruch)

1. Angenommen, $x \in \mathbb{Q}$ sei Lösung der Glg. $x^2 = 2$. Sei $x = \frac{a}{b}$ die gekürzte Darstellung mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

2. Dann $2 = x^2 = \frac{a^2}{b^2}$, also $2b^2 = a^2$.

   Dann ist $2 \mid a$, etwa $a = 2n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.

   Aus $2b^2 = a^2 = 4n^2$ folgt $b^2 = 2n^2$, also $2 \mid b$.

3. Nun ist $2 \mid a \wedge 2 \mid b$ ein $\lightning$ gegen die Voraussetzung, dass $\frac{a}{b}$ gekürzt sei.

$\square$

- Annäherung an $\sqrt{2}$: 1; 1.4; 1.41; 1.414; ....

Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen) durch "alle Wurzeln"?

(a) Zulassung unendlich langer, nichtperiodischer Dezimalbrüche.
(b) Erweiterung mit Cauchyfolgen
(c) Dedekindsche Schnitte

Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$

Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$:

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ hat eine kleinste obere Schranke $z \in \mathbb{R}$.

Bsp.: $M := \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 2\}$

z.B. ist 3 eine ob. Schranke von M, denn

$\forall x \in M: x \leq 3$

$\ulcorner x^2 \leq 2 \Rightarrow x \leq 3$, denn

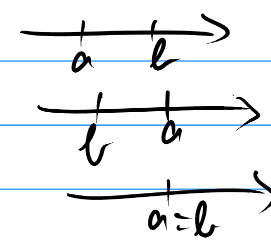
$\rightsquigarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $\qquad x > 3 \Rightarrow x^2 > 9 > 2 \Rightarrow x^2 > 2 \lrcorner$

Vk5:

Ungleichungen in $\mathbb{R}$

"$\leq$": 1. Zwischen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen:

$a < b, \quad a = b, \quad a > b$



2. $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$
3. $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$
4. $a \leq a$

"Abschätzen": Ungleichungsketten bilden:

$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \Rightarrow x_1 \le x_n$ (wegen 3.)

Rechnen mit Ungleichungen: $x, y \in \mathbb{R}$

(1) $x \le y \Leftrightarrow x < y \vee x = y$

(2) $x \le y \wedge a \le b \Rightarrow x + a \le y + b$ $\quad (a, b \in \mathbb{R})$

(3) $x \le y \wedge a \ge 0 \Rightarrow a \cdot x \le a \cdot y$ $\quad (a \in \mathbb{R})$

(4) $x \le y \Leftrightarrow -y \le -x$

⌜aus (2), denn $x \le y \overset{-x \le -x}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} \underbrace{-x + x}_{0} \le -x + y$

$\overset{-y \le -y}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} \underbrace{-y + 0}_{-y} \le -x + \underbrace{y - y}_{=0} \Rightarrow -y \le -x$.

Umgekehrt, d.h. "$\Leftarrow$" analog. ⌟

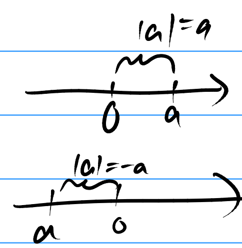
(5) $0 < x \le y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \le \frac{1}{x}$ ⌜z.B. aus (3)...⌟

(6) $x \le y \wedge a < 0 \underset{\substack{(3)\\ -a > 0}}{\Rightarrow} (-a)x \le (-a)y \underset{(4)}{\Rightarrow} ay \le ax$.

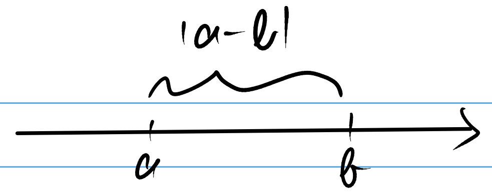
Def.: Für $a \in \mathbb{R}$ ist $|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \ge 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$

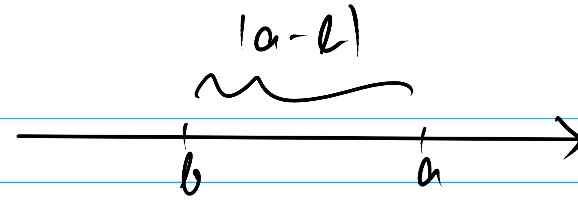
der Betrag von a.

Def.: Für $a, b \in \mathbb{R}$ heißt $|a - b|$ der Abstand von a und b.

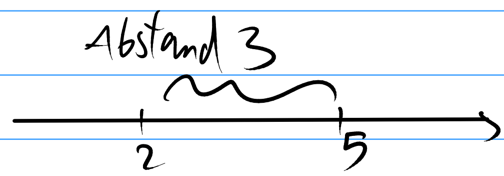


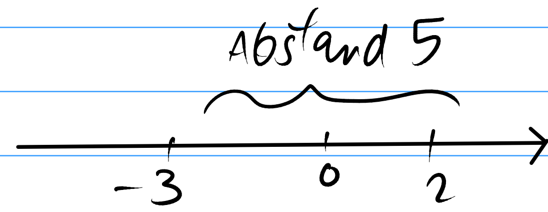
$a \neq b$:





z.B.:





$|5-2| = 3$ $\qquad$ $|2-(-3)| = |2+3| = 5$

Rechenregeln: $(a, b \in \mathbb{R})$

(1) $-|a| \leq a \leq |a|$

(2) $|-a| = |a|$

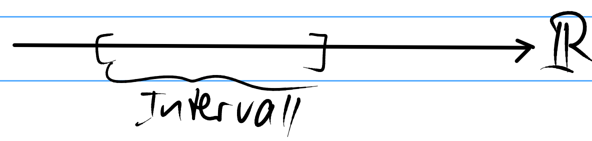
(3) $|ab| = |a| \cdot |b|$

(4) $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$, auch mit "<"

(5) $|a+b| \leq |a| + |b|$ ← "Dreiecksungleichung"

$\left[x_n \to x \quad \rightsquigarrow \text{Abstände: } |x_n - x| \to 0 \right]$

Intervalle:



Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.

Def.: $[a,b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$ offenes Intervall

[Bem.: $a, b \in [a,b]$, $a \notin (a,b)$, $b \notin (a,b)$]

$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$

$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}$

Bsp.: $[2, \sqrt{5}] \subseteq \mathbb{R}$

Bsp.: Beh.: $\{x \in \mathbb{R};\ |1+x| \leq 2\} \overset{!}{=} [-3, 1]$.

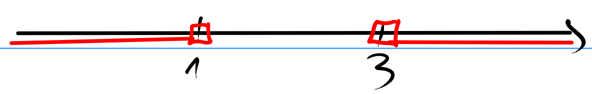
Bew.:

$$|1+x| \leq 2 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} -2 \leq 1+x \leq 2$$
$$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-3, 1]. \quad \square$$

Bsp.: Beh.: $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\};\ \frac{2}{x-1} < 1\} \overset{!}{=} (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Bew.: $\frac{2}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x-1, & \text{falls } x-1 > 0 \\ 2 > x-1, & \text{falls } x-1 < 0 \end{cases}$ "Alternativen"

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x, & \text{falls } x > 1 \\ 3 > x, & \text{falls } x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3 \lor x < 1$$
$$\Leftrightarrow x \in (3, \infty) \cup (-\infty, 1).$$



$\square$

Def.: Sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, dann heißt $a^n := \overbrace{a \cdots a}^{n\text{-mal}}$ die n-te Potenz von a, $a^0 := 1$,

weiter def. $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$.

$\rightsquigarrow$ a^m mit $m \in \mathbb{Z}$ heißt m-te Potenz, a heißt Basis, m heißt Exponent.

Potenzgesetze: $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $m, n \in \mathbb{Z}$

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $(ab)^m = a^m b^m$

(3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Satz: $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}\ \forall a \in \mathbb{R}_{\geq 0}\ \exists y \in \mathbb{R}_{\geq 0}: \quad y^n = a$

⌜wegen Vollständigkeit von $\mathbb{R}$⌟

Dabei existiert y eindeutig.

Def.: Diese Zahl y heißt n-te Wurzel aus a,

in Zeichen: $y = \sqrt[n]{a}$

⌜Def. zeigt: $(\sqrt[n]{a})^n = a$⌟ Bsp.: $\sqrt[3]{8} = 2$, da $2^3 = 8$

Wurzelgesetze: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$ ...

Def.: Für $a > 0$ sei $a^{1/k} := \sqrt[k]{a}$.

⌜Denn: $(a^{1/k})^k = a^{(1/k) \cdot k} = a^1 = a$, also $a^{1/k} = \sqrt[k]{a}$.⌟
Potenzgesetz!

speziell: $a^{m/k} := (a^m)^{1/k} = \sqrt[k]{a^m}$.

⇝ Potenzen mit rationalen Exponenten,
sind gültig: $\left(\forall a, b \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall m, n \in \mathbb{Q}\right)$

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$
(2) $(ab)^m = a^m b^m$
(3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$\sqrt[3]{-8} \overset{!}{=} -2$

-7-

$$\sqrt[6]{(-8)^2} = \left((-8)^2\right)^{\frac{1}{6}} \underset{\uparrow}{=} (-8)^{2\cdot\frac{1}{6}} = (-8)^{\frac{2}{6}}$$

Potenzgesetz

↯

→ Entweder Potenzgesetze sollen gelten → Potenzen mit neg. Basen nicht erlaubt!

oder: Potenzen mit neg. Basen erlaubt

→ Potenzgesetze gelten nicht