

Notizen vom 27. Sept. 2016

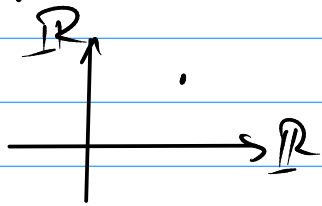
VK6.1: Abbildungen

Def.: Seien A, B Mengen.

Produktmenge: $A \times B := \{ \underbrace{(x, y)}_{\text{geordnetes Paar}}; x \in A, y \in B \}$

heißt Produkt von A und B

Bsp.: $A = B = \mathbb{R} \leadsto \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y); x, y \in \mathbb{R} \}$



$$(2, -3.4) \neq (-3.4, 2)$$

$$\text{aber } \{2, -3.4\} = \{-3.4, 2\}$$

Sind

$A_1, \dots, A_n$ Mengen, so kann man $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ bilden:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{ \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{n\text{-Tupel}}; \begin{matrix} x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots \\ x_n \in A_n \end{matrix} \}$$

$$\text{Bsp.: } \mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$$

$\leadsto \mathbb{R}^1$: Zahlenstrahl

$\mathbb{R}^2$: Zeichenebene

$\mathbb{R}^3$: Anschauungsraum

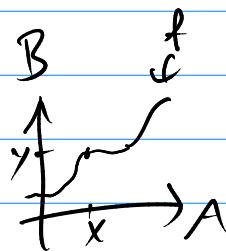
$\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \mathbb{R}^6, \dots$

Def.: Seien A, B Mengen. Eine Abbildung von A nach B

ist (eine Menge) $f \subseteq A \times B$ mit

$$\forall x \in A \exists! y \in B: (x, y) \in f$$

$\underbrace{\quad}_{\text{es ex. genau}} \quad \text{ein } y \text{ zu } x$



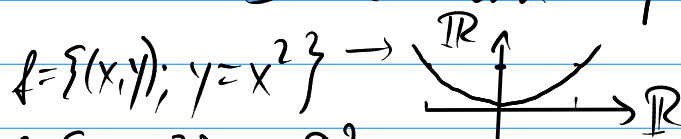
Schreiben: $y = f(x)$ für $(x, y) \in f$

und $f: A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Defini- Bildbereich/
 tionsbereich Wertebereich

$f(x)$ heißt Bild/Wert von x unter der Abb. f

Bsp.: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, d.h. $f(x) = x^2$
 ist Abb. von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (Standardparabel)

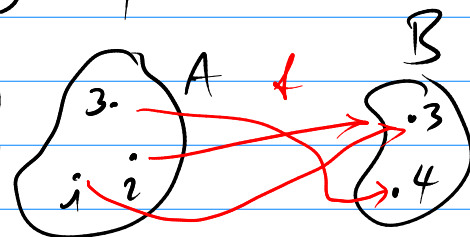


oder $f = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$

$f: A \rightarrow B, 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4$

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y^2, z - y)$



z.B. $(-1, 3, 2) \mapsto (-1 + 3^2, 2 - 3)$

$f(-1, 3, 2) = (-1 + 3^2, 2 - 3)$
 schreiben auch $f(-1, 3, 2)$

-3-

Def.: Eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ heißt

- injektiv, falls es zu jedem $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$.

$$\lceil \forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{bzw. } \lceil \forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \rceil$$

- surjektiv, falls es zu jedem $y \in B$ mindestens ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$.

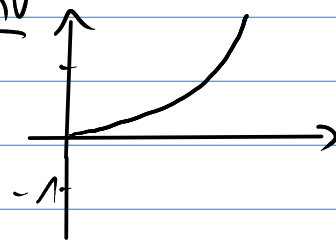
$$\lceil \forall y \in B \exists x \in A: f(x) = y \rceil$$

- bijektiv, falls es zu jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$.

d.h. injektiv und
surjektiv

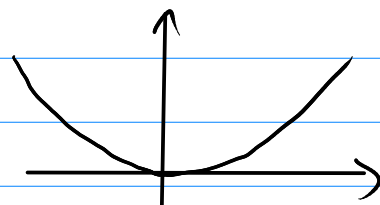
Bsp.: • $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist injektiv

(denn $y \in \mathbb{R}$ hat höchst.
ein Urbild x mit $x^2 = y$)



• $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = x^2$ ist surjektiv

(denn $y \geq 0$ hat mind. ein Urbild x
mit $x^2 = y$)



• $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = x^2$ ist bijektiv

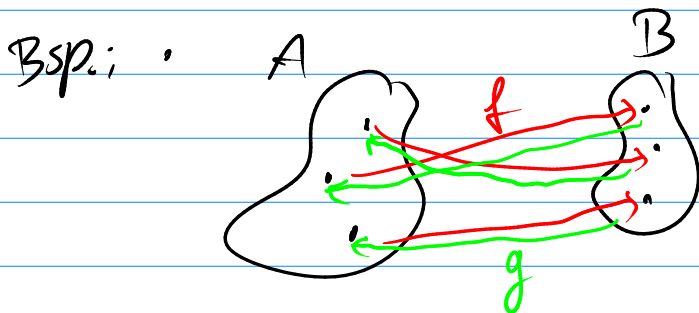


-4-

Merke: Einschränken von Def. bereich / Wertebereich
kann die Eigenschaften einer Funktion ändern!

Ist $f: A \rightarrow B$ bijektiv, kann $g: B \rightarrow A$ def. werden
durch $\forall x \in A: g(f(x)) = x$. $\lceil \forall y \in B: f(g(y)) = y \rceil$

Diese Abb. g heißt Umkehrabbildung von f .



• $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ hat Umkehrabb.

$$g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \begin{matrix} x \mapsto \sqrt{x} \\ y \mapsto \sqrt{y} \end{matrix} \quad \lceil g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x \rceil$$

Bem. (ohne Beweis):

- Es ex. Bijektion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, deswegen ist $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich.
- Es ex. Keine Bijektion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$,
deswegen ist $\mathbb{R}$ überabzählbar unendlich.

VK6.2: Folgen und Summen

Def.: Eine (reelle) Folge a ist eine Abb. $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$,
statt $a(1), a(2), a(3), \dots$ schreibe auch $a_1, a_2, a_3, \dots$

Die a_n heißen Folgenglieder, die Folge a schreibt man als $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Def.: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge.

Dann heißt $\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n$

"Summe der a_i
von $i=1$ bis n "

die Summe der
 $a_1, \dots, a_n$

Die Hilfszahl heißt Index bzw. Laufindex.

$\rightarrow$ neue Folge: $s_1 = \sum_{i=1}^1 a_i = a_1$, $s_2 = \sum_{i=1}^2 a_i = a_1 + a_2$, $s_3 = \sum_{i=1}^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3$,
...

Summenfolge: $s_1 = a_1$, $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$,

d.h. $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$

Eine Summenfolge heißt auch Reihe,

ihre Folgenglieder auch Partialsummen.

Bsp.: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, z.B. $\sum_{i=1}^{100} i = 5050$.

z.B. $\sum_{i=2}^{100} i = 5049$.

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$$

Def.: $\prod_{i=1}^n a_i := a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ Produkt

Bsp.: $n! = \prod_{i=1}^n i$, $\prod_{i=1}^n 2 = 2^n$, $\prod_{i=1}^n 3 = 3^n$

Vk6.3: Grenzwerttheorie von Folgen

Def.: Eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, wenn sie einen Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ hat.

Eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0: |a_n - c| < \varepsilon.$$

"für alle hinreichend großen" Abstand von a_n zu c
 bzw. "für alle n , die groß genug sind"

etwa $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{2}{10}, \frac{2}{100}, \frac{2}{1000}, \dots$

Bsp.: $a_n = 3, 3.1, 3.01, 3.001, 3.0001, \dots \rightarrow 3$

Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

Eine Folge mit Grenzwert $c=0$ heißt Nullfolge.

Bsp.: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ist Nullfolge, ist plausibel:

Die Werte $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$ werden "immer kleiner": < 2 für $n \geq 1$

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$. Dazu sei

$$m_0(\varepsilon) := \min \{ m_0 \in \mathbb{N} : m_0 > \frac{1}{\varepsilon} \}.$$

Sei $n \geq m_0(\varepsilon)$, dann ist $n \geq m_0(\varepsilon) > 1/\varepsilon$,

also $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$ □

$$< 1 \text{ für } n \geq 2$$

$$< \frac{1}{2} \text{ für } n \geq 3$$

$$< 0.4 \text{ für } n \geq 3$$

$$< \varepsilon \text{ für } n \geq m_0(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

-7-

Notation: $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

bei Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert c .

Bsp.: $\frac{n+1}{n+3} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \xrightarrow{\text{Grenzwertsatz}} \frac{1+0}{1+0} = 1$

$\nearrow 0$
 $\searrow 0$

Notation: Falls $(\sum_{i=1}^n a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ kgt.,

schreibt man $\underline{\underline{\sum_{i=0}^{\infty} a_i}} \in \mathbb{R}$ für ihren Grenzwert

Bsp.: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2.$

$\lceil = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \rceil$