Notizen vom 29. September 2016

Hatten: $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = 2$

Ist Spezialfall von:

Beh.: $\forall x\in(-1,1):\ \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} x^i}_{\text{geometrische Reihe}} = \frac{1}{1-x}$

⌜Bei $x=\frac{1}{2}$ ✓⌟

Bew.:

1. Haben (endliche) geometrische Summenformel:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad \text{für alle } x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

⌜Denn:

$$(x-1)\cdot\sum_{i=0}^{n} x^i = x\cdot\sum_{i=0}^{n} x^i - \sum_{i=0}^{n} x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} x^i$$

Indexverschiebung/Subst.: $k=i+1$ }

$$\leadsto = \sum_{k=1}^{n+1} x^k - \sum_{i=0}^{n} x^i$$

$$= \underbrace{x^{n+1}}_{\text{"Glas"}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x^i - \sum_{i=1}^{n} x^i}_{=0 \text{ "Luft"}} \underbrace{-x^0}_{\text{"Glas"}} = x^{n+1}-1.$$

"Teleskop-summe" ↗ ⌟

2. Haben $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{\overset{\to 0}{x^{n+1}}-1}{x-1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{-1}{x-1} = \underline{\underline{\frac{1}{1-x}}}$, da $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge für $x\in(-1,1)$. □

- Aber: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ex. nicht, denn $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Diese Reihe heißt harmonische Reihe.

⌜Plausibel: $1 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\dots\right.$

$> 1 + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{16} + \dots$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \to \infty$⌟

VK7.1 Eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ heißt Potenzreihe

↑die $c_k \in \mathbb{R}$

(untersucht für $x \in \mathbb{R}$).

Neben der geom. Reihe ist das wichtigste Bsp.:

Def.: $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) := \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\cdot x^n}_{\text{Reihe kgt. für alle } x\in\mathbb{R}} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$

Exponentialfunktion

⌜s. Quotientenkriterium Ana 1⌟

Bsp: $\exp(0) = \underbrace{\frac{0^0}{0!}}_{=1} + \underbrace{\frac{0^1}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \dots}_{=0} = 1$,

$e = \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \dots \approx 2{,}718281828456\dots$

heißt Eulersche Zahl

- Funktionalgleichung: $\forall x,y \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y) \qquad \ulcorner\text{Ana 1}\lrcorner$$

$$\rightsquigarrow \exp(2x) = (\exp(x))^2, \quad \exp(3x) = \exp(x+2x) = (\exp(x))^3, \quad \dots$$

$$\dots \rightsquigarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{Q}: \ \exp(yx) = (\exp(x))^y$$

Also: Für $y \in \mathbb{Q}$: $\exp(y) = \exp(y\cdot 1) = (\exp(1))^y = e^y$

Def.: Für $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ setze $e^y := \exp(y)$.

$\ulcorner$z.B.: $e^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2})\lrcorner$

Dann: $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$

$\rightsquigarrow$ Potenzgesetze gelten für Potenzen e^x, e^y, wo $x,y \in \mathbb{R}$

Bem.: $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist bijektiv $\ulcorner$o.Bew.$\lrcorner$

Def.: Die Umkehrfunktion von $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist die natürliche Logarithmusfunktion $\ln: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, d.h. $\ln$ ist erklärt durch: $\forall x \in \mathbb{R}: \ln(\exp(x)) = x$.

$\ulcorner$Ebenso: $\forall y>0: \exp(\ln(y)) = y$

bzw. $\forall x,y \in \mathbb{R}$: $y = \ln x \iff e^y = x$.$\lrcorner$

Problem: Berechne a^x für $x \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$:

Haben: $$e^{x \ln a} \underset{\uparrow}{=} \left(e^{\ln a}\right)^x = a^x$$

Potenzgesetz für exp

$$\ulcorner \exp(x \ln a) = (\exp(\ln a))^x = a^x \lrcorner$$

Bsp.: $$2^x = 7 \iff x = \log_2(7)$$

$$\iff e^{x \ln 2} = 2^x = 7 = e^{\ln 7} \iff x \ln 2 = \ln 7$$

$$\iff x = \frac{\ln 7}{\ln 2}$$

Basisumwandlung:

$$\log_a(c) = \underbrace{\log_a(b)}_{} \cdot \log_b(c),$$

denn: $$\frac{\ln(c)}{\ln(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \cdot \frac{\ln(c)}{\ln(b)} \quad \checkmark$$

VK7.2: Die Komplexen Zahlen sind eine Erweiterung von $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

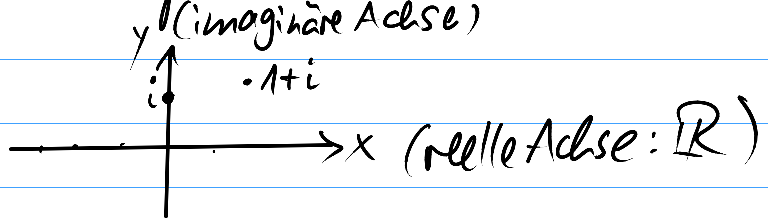
Konstruktion: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$ mit der "richtigen" Def. für $+, \cdot$

⇝ Schreiben: $x + iy$ für $(x,y) \in \mathbb{C}$

Def.: x heißt Realteil und y heißt Imaginärteil der komplexen Zahl $\underline{\underline{x + iy \in \mathbb{C}}}$

Anschaulich: Komplexe Ebene

$\mathbb{C}$:



Reelle Zahlen: $x = x + i \cdot 0, \; x \in \mathbb{R}$

rein imaginäre Zahlen: $iy = 0 + iy, \; y \in \mathbb{R}$

Def. + : Komponentenweise, d.h.

$$(x+iy)+(u+iv) := (x+u)+i(y+v)$$

Def. • :

$$(x+iy)\cdot(u+iv) := (xu-yv)+i(yu+xv)$$

Bsp.: $(-1+2i)\cdot(3+5i) = (-3-10)+i(6-5)$
$= -13+i.$

Für $\underline{\underline{i}} = 0+i\cdot 1$ gilt:

$$i^2 = i \cdot i = (0+i\cdot 1)\cdot(0+i\cdot 1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1) + i(0\cdot 1 + 1\cdot 0)$$
$$= -1$$

In $\mathbb{C}$ hat $x^2 = -1$ die Lösungen $i, -i$.

Erhalten $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ist Körper, d.h. dieselben Regeln für $+,\cdot$ wie bei $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ gelten

Division: $\dfrac{x+iy}{u+iv} = \dfrac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)} = \dfrac{(xu+yv)+i(yu-xv)}{u^2-i^2v^2}$

$$= \frac{xu+yv}{u^2+v^2} + i \cdot \frac{yu-xv}{u^2+v^2}$$

Bem.: • $\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. Cauchyfolgen sind konvergent

• $\mathbb{C}$ ist nicht anordenbar, d.h. es gibt keine Möglichkeit, "$\leq$" von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ fortzusetzen, so dass Rechenregeln für "$\leq$" erhalten bleiben

(Rechengesetz: $x \leq y$ und $a > 0 \Rightarrow a \cdot x \leq \cdot ay$ ⊛)

Bew. (durch Widerspruch): Angenommen, "$\leq$" auf $\mathbb{C}$ wäre möglich.
Dann wäre $i > 0$ oder $i < 0$.

• Wäre $i > 0$, folgte $\underset{\uparrow ⊛, \text{ da } i>0}{i \cdot i > i \cdot 0}$, d.h. $-1 > 0$ ↯.

• Wäre $i < 0$, folgte $\underset{\uparrow ⊛, \text{ da } (-i)>0}{(-i)(-i) > (-i) \cdot 0}$, d.h. $-1 > 0$ ↯. □

Bem.: $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^k}{n!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$

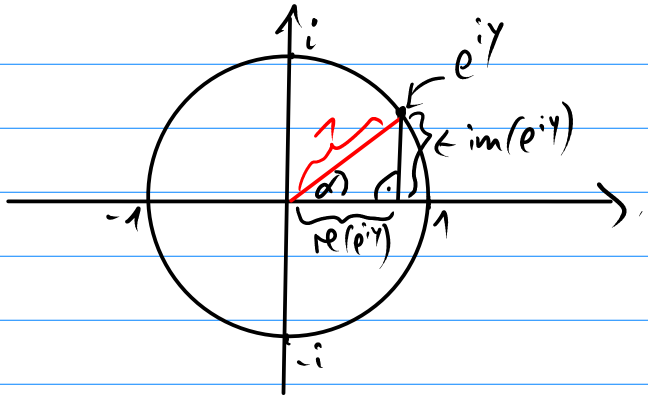
$\rightsquigarrow \exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\rightsquigarrow$ Funktionalgl.: $\forall z, w \in \mathbb{C}: \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$

z.B.: $\exp(x+iy) = \underbrace{\exp(x)}_{\in \mathbb{R}_{>0}} \cdot \underbrace{\exp(iy)}_{?}$
$(x, y \in \mathbb{R})$

Beh.: $|\exp(iy)| = 1$, denn:

$$|\exp(iy)|^2 = \exp(iy)\exp(-iy) = \exp(iy - iy) = \exp(0) = 1$$



$$\exp(iy) = e^{iy}$$

$$|e^{iy}| = 1$$

$$e^{iy} = \underbrace{\cos y}_{re(e^{iy})} + i\,\underbrace{\sin y}_{im\,e^{iy}}$$

(Ein Umlauf ⤳ der Kreislinie mit e^{y} von $y=0$ bis $y=2\pi$)

$$\underline{e^{2\pi i} = 1}$$ Eulersche Formel.

ENDE