

Übungsblatt Nr. 3, Besprechung am 15.9.2016

Bitte das Übungsblatt möglichst ausgedruckt in die Übung mitbringen.

Aufgabe 1: Formulierung direkter Beweise

Zeigen Sie:

1. Jede ungerade natürliche Zahl ist Differenz zweier Quadratzahlen.
2. Für jede natürliche Zahl n sind $n^2 + n$ und $n^2 - n$ gerade Zahlen.
3. Jede Kubikzahl ist Differenz zweier Quadratzahlen.
4. Für je zwei reelle Zahlen x und y ist $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

Aufgabe 2: Formulierung eines indirekten Beweises

Formulieren Sie einen indirekten Beweis der folgenden Aussage, einmal in Form eines Widerspruchsbeweises und einmal in Form eines Kontrapositionsbeweises. (Analysieren Sie zunächst, was die Vor. und was die Beh. der Aussage ist.) Zusatzfrage: Wie muss die Aussage formuliert sein, damit Ihr Kontrapositionsbeweis einen direkten Beweis darstellt?

Sei n eine natürliche Zahl größer als 1.
Ist $n^2 + 2$ eine Primzahl, dann ist n durch 3 teilbar.

(Hinweis zur Lösung: Verwenden Sie im Beweis, dass eine Zahl $n > 1$, die nicht durch 3 teilbar ist, von der Form $n = 3k + 1$ oder $n = 3k - 1$ ist mit einem $k \geq 1$.)

Bemerkung zum Verständnis der Aufgabe: Setzen Sie explizit Zahlen für n in den Ausdruck $n^2 + 2$ ein, bis Sie auf Primzahlen stoßen. Belegen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass die Rückrichtung nicht gilt.

Aufgabe 3: Vorbilder: Beispiele für Beweisverfahren.

Welches Beweisverfahren wird in den folgenden Beweisen benutzt?

(Bem.: Das Zeichen $a \mid b$ heißt " a teilt b ")

Vergleichen Sie die Beweise miteinander: Einmal rein äußerlich, andererseits auch inhaltlich: Wo wird direkt, wo indirekt argumentiert? (Wenn Sie nicht alles inhaltlich verstehen, ist das nicht so schlimm. Sie sollen hier nur Beispiele sehen, wie man logische Argumentationen "mathematisch" richtig aufschreiben kann.)

Bitte wenden

Satz 1: Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.

Beweis: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, etwa n , $n+1$, $n+2$, ist $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3 \cdot (n+1)$, also durch drei teilbar. $\square$

Satz 2: Vor.: a, b, c seien aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Beh.: $3 \mid a + b + c$.

Bew.: Laut Vor. ist $b = a+1$ und $c = b+1 = (a+1)+1 = a+2$. Dann gilt: $a+b+c = a+(a+1)+(a+2) = 3a+3 = 3 \cdot (a+1) \Rightarrow 3 \mid a+b+c$. $\square$

Satz 3: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: Angenommen, es gäbe nur die endlich vielen Primzahlen $p_1, \dots, p_r$. Dann ist die natürliche Zahl $n := p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r + 1$ durch keine der Primzahlen $p_1, \dots, p_r$ teilbar. Da aber jede natürliche Zahl > 1 durch eine Primzahl (etwa der kleinste Teiler von n , der > 1 ist, vgl. Satz 4) teilbar sein muss, existiert noch eine weitere Primzahl, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Satz 4: Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist durch eine Primzahl teilbar.

Bew.: Sei p der kleinste Teiler > 1 , der n teilt. Dann ist p prim, denn wäre p zusammengesetzt aus zwei Faktoren $a, b > 1$, so wäre $a > 1$ ein Teiler von n , der kleiner ist als p , im Widerspruch zur Wahl von p . Also ist p prim. $\square$

Satz 5: Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Dann ist $\mathbb{P}$ unendlich groß.

Bew.: Ann.: $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_r\}$.

Betrachte $n := p_1 \cdot \dots \cdot p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \dots, p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$, und es gilt $p \notin \{p_1, \dots, p_r\}$, Widerspruch. $\square$

Bem.: Die Behauptung in Satz 4 ist auch als $\forall n \in \mathbb{N} \exists p \in \mathbb{P} : p \mid n$ schreibbar.

Satz 6: Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Dann ist $\mathbb{P}$ unendlich groß.

Bew.: Wir konstruieren eine unendlich große Menge von Primzahlen wie folgt: Sei p_1 eine Primzahl, etwa $p_1 := 2$. Sind Primzahlen $p_1, \dots, p_r$ gegeben, betrachte man $n := p_1 \cdot \dots \cdot p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \dots, p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$, und es gilt $p \notin \{p_1, \dots, p_r\}$, setze dann $p_{r+1} := p$. Auf diese Weise können unendlich viele Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \dots$ konstruiert werden. $\square$