Übungsblatt Nr. 5, Besprechung am 22.9.2016

Aufgabe 1: Vollständige Induktion

Zeigen Sie die folgenden Sätze mit vollständiger Induktion:

$$(a) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

$$(b) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}: \ 1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + 3 \cdot (3!) + \cdots + n \cdot (n!) = (n+1)! - 1.$$

Aufgabe 2: Noch mehr vollständige Induktion.

Zeigen Sie:

(a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist $3n^2 > (n+1)^2$.

(b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist $3^n > n^2$.

(c) Zeigen Sie, dass für $n \geq 4$ die Ungleichung $n! > n^2$ gilt.

Zusatzfrage: Kann die Aussage von Aufgabe 1 auf Übungsblatt 3 mit einer Induktion bewiesen werden?

Aufgabe 3: Schriftlicher Beweis

Hier stehen zwei mathematische Sätze (A) und (B), wählen sie einen von beiden aus und formulieren Sie für diesen einen Beweis schriftlich auf Papier. Sie können diese schriftliche Lösung freiwillig bei Ihrer Übungsleitung abgeben am Donnerstag, den 22.9., und korrigieren lassen. Auch die Bearbeitung in kleinen Teams (2-5 Personen) ist erlaubt. Die Korrektur erhalten Sie in der Übung am 27.9., wo Sie die Aufgabe besprechen können.

(A) $\forall\, n \in \mathbb{N}: \ 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdots (4n-2) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

(B) Jede zusammengesetzte natürliche Zahl n besitzt einen Primteiler p mit $p \leq \sqrt{n}$.