Übungsblatt Nr. 6, Besprechung am 27.9.2016

Aufgabe 1: Logik der Definition eines teilerfremden Zahlenpaares.

(a) Im Skript wurde durch die Aussage

$$\forall\, c \in \mathbb{N}:\; c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c = 1$$

definiert, dass zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ *teilerfremd* sind. Wie kann man diese Aussage rein sprachlich ausdrücken? Schreiben Sie die formale Verneinung der Aussage auf und drücken Sie diese ebenfalls sprachlich aus.

Denken Sie daran, dass "$c \mid a$" und "$c \mid b$" ebenfalls Abkürzungen für Aussagen sind; diese enthalten einen Existenzquantor. Wenn man diese Aussagen dann in die Definition einsetzt, wie lautet dann die formale Verneinung und ihre sprachliche Umsetzung?

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Zahlen $n! + 1$ und $(n+1)! + 1$ teilerfremd.

Aufgabe 2: Vereinigung reeller Intervalle.

Schreiben Sie die folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von Intervallen und beweisen Sie Ihre Behauptung:

$$\begin{aligned}
A &:= \{x \in \mathbb{R};\ |x| < 2\},\\
B &:= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |x| \le 3\},\\
C &:= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |2x-3| \ge 0.5\},\\
D &:= \{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R};\ |x-2| \le 3\},\\
E &:= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ (x-1)^2 \ge 2\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Zurückführen auf bekannte Rechenregeln.

Gegeben sind die folgenden Regeln (1) bis (4) zum Rechnen mit der Ordnungsrelation $<$ in R, wobei $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ gegeben sei mit den üblichen Rechenoperationen $+$ und $\cdot$, wie im Skript VK4 angegeben.

(1) $\forall\, a, b \in R:\; a < b \vee a = b \vee b < a$, wobei keine zwei der drei Alternativen gleichzeitig wahr sein können,

(2) $\forall\, a, b, c \in R:\; a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

(3) $\forall\, a, b, c \in R:\; a < b \Rightarrow a + c < b + c$

(4) $\forall\, a, b, c \in R:\; a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

Leiten Sie die folgenden beiden Rechenregeln zum Rechnen in R her:

(A) $\forall\, b \in R:\; b < 0 \Leftrightarrow -b > 0$

(B) $\forall\, a, b \in R:\; a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

(Verwenden dürfen Sie die obigen Regeln (1) bis (4), alle bekannten Rechenregeln zu $+$ und $\cdot$ (die auf Seite 7 in VK4_a.pdf) und die Regeln 1.–3. auf Seite 5 der Vorlesungsnotizen vom 20. September. Für eine der beiden Regeln kann auch die andere benutzt werden, wenn Sie diese schon hergeleitet haben.)

Lösungshinweis für (B): Führen Sie alle möglichen Fälle mit $a > 0$, $a < 0$, $b > 0$, $b < 0$ mit Regel (4) zum Widerspruch gegen Regel (1).