

Übungsblatt Nr. 7, Besprechung am 29.9.2016

Aufgabe 1: Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen.

Bestimmen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

$$a : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, \quad a(1) = 1, \quad a(2) = 3, \quad a(3) = 3, \quad a(4) = 2$$

$$b : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, \quad b(1) = 1, \quad b(2) = 3, \quad b(3) = 3, \quad b(4) = 2$$

$$c : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, \quad c(1) = 1, \quad c(2) = 3, \quad c(3) = 4, \quad c(4) = 2$$

$$d : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2\}, \quad d(1) = 1, \quad d(2) = 1, \quad d(3) = 2, \quad d(4) = 1$$

$$e : \{1\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad e(1) = 5$$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n$$

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad g(1) = 1 \text{ und } g(n) = n - 1 \text{ für } n > 1$$

$$h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad h(n) = n - 1, \text{ für gerades } n \text{ und } h(n) = n + 1, \text{ für ungerades } n$$

Aufgabe 2: Summenzeichen, Teleskopprinzip und Indexverschiebung

(a) Berechnen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\sum_{k=1}^{10} (k^7 - k^5 + k) + \sum_{k=21}^{30} ((k-20)^5 - (k-20)^7)$$

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln(n+1).$$

$$\text{Tipp: } \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k).$$

Aufgabe 3: Konvergenz reeller Folgen.

Untersuchen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren. Falls ja, geben Sie den Grenzwert an.

$$a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{1-n^3} & \text{für } n \in \{163, 164, \dots, 163163\}, \\ 100 & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$c_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n, \quad d_n = \left(-\frac{4}{5}\right)^n.$$

Wie lautet die Menge der oberen Schranken der Mengen $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$ und $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$?