

Letztes Übungsblatt Nr. 8 ohne Besprechung

Aufgabe 1: Rechnen mit $\exp$ und $\ln$.

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ fest. Geben Sie (in Abhängigkeit von a, b, c) die Lösungsmenge der $x \in \mathbb{R}$ an, die die folgenden Gleichungen lösen.

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & a^{\ln(x^b)} = c, & \text{(ii)} \quad x^x = 1, & \text{(iii)} \quad (\ln(a))^x = b, \\ \text{(iv)} & \exp(cx)^a = 2^b, & \text{(v)} \quad \ln\left(\frac{a}{e^{x-c}}\right) = b, & \text{(vi)} \quad x^{2\ln(a)} = 2^b. \end{array}$$

Aufgabe 2: Rechnen mit komplexen Zahlen.

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, wobei $i^2 = -1$. Berechnen Sie weiter das komplex Konjugierte, den Betrag, das multiplikativ Inverse sowie das Quadrat dieser komplexen Zahlen.

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{1+i}, \quad \text{(ii)} \quad \frac{1-2i}{1+2i}, \quad \text{(iii)} \quad \frac{1}{i} + \frac{2-i}{3i}, \quad \text{(iv)} \quad \left(\frac{1-2i}{2+i}\right)^2, \quad \text{(v)} \quad e^{2\pi i/3}.$$

Aufgabe 3: Lösung algebraischer Gleichungen in $\mathbb{C}$

- (a) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$ in $\mathbb{C}$ an, indem Sie die Zerlegung $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$ verwenden. Geben Sie die drei Lösungen auch in Polarkoordinatendarstellung an.
- (b) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$ in $\mathbb{C}$ an, indem Sie die Zerlegung $z^4 - 1 = (z-1)(z^3 + z^2 + z + 1) = (z-1)(z+1)(z^2 + 1)$ verwenden. Geben Sie die vier Lösungen auch in Polarkoordinatendarstellung an.
- (c) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^5 = 1$ in $\mathbb{C}$ an. Wie lauten die Lösungen von $z^n = 1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 4*: Stetigkeit einer Funktion

Die Stetigkeit einer Funktion f kann man einerseits mit dem ε - δ -Kriterium und andererseits mit dem Folgenkriterium (s. Vorlesung VK8) definieren, beide Aussagen sind äquivalent.

- (a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$. Zeigen Sie mit dem ε - δ -Kriterium, dass f in 0 stetig ist.
- (b) Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums, dass f in 1 stetig ist.
- (c) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$. Zeigen Sie sowohl mit Hilfe des ε - δ - als auch mit dem Folgenkriterium, dass f in 0 nicht stetig fortsetzbar ist (d. h., man kann $f(0)$ definieren, wie man will, f ist in 0 nicht stetig).