Vorkurs Mathematik 2016

WWU Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik

PD Dr. K. Halupczok

Skript VK1 vom 8.9.2016

VK1: Logik – Die Kunst des Schlussfolgerns

Definition 1: Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das wahr oder falsch sein kann.

Beispiel 2: Aussagen sind etwa: Es regnet. 3 ist eine gerade Zahl. Es gibt keine Känguruhs in Münster. Mathematik ist schwer zu erlernen. In Münster regnet es oder die Kirchenglocken läuten, und wenn beides gleichzeitig passiert, dann ist Sonntag.

Der Wahrheitsgehalt von Sätzen der Umgangssprache ist nicht immer leicht zu bestimmen, wie an diesen Beispielen zu sehen ist. Es gibt außerdem auch Aussagen, deren Wahrheitsgehalt unbekannt ist, wie etwa die folgende:

Beispiel 3: Jede natürliche gerade Zahl, die größer oder gleich 4 ist, ist Summe zweier Primzahlen. (Goldbachsche Vermutung seit 1742)

Bei manchen Aussagen kann auch angegeben werden, seit wann die Menschheit ihren Wahrheitsgehalt kennt, z. B.:

Beispiel 4: Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ hat für $n \geq 3$ keine Lösungstripel im Bereich der natürlichen Zahlen. (Fermatsche Vermutung seit 1637, bewiesen seit 1993 durch A. Wiles und R. Taylor, veröffentlicht 1995, heute: "Satz von Fermat–Wiles")

Die letzte Aussage in Bsp. 2 zeigt, dass Aussagen mit "und", "oder" verknüpft werden können, um neue Aussagen zu erhalten. Durch Verneinung können ebenfalls neue Aussagen gebildet werden. Offenbar gibt es dafür einige Bildungsgesetze, die universell sind. Diese Grundgesetze des Schlussfolgerns möchten wir uns zuerst erarbeiten.

Um in der Mathematik mit ihren Aussagen und den zugehörigen Wahrheitsgehalten vernünftig arbeiten zu können, liegt es nahe, einige wenige Aussagen als kleinste wahre Grundbausteine anzunehmen (das sind dann die Prämissen bzw. die Axiome), und zu versuchen, alle weiteren daraus abzuleiten, wofür dann die Regeln der Logik verwendet werden. Damit ist es dann einigermaßen leicht zu bestimmen, ob etwas wahr oder falsch ist, im Gegensatz zu Sätzen der Umgangssprache, deren Wahrheitsgehalt von allerlei weiteren Gegebenheiten (aktuelles Wetter, subjektive Meinung. . .) abhängen kann.

Und: Am besten möchte man dabei mit möglichst wenig Axiomen auskommen!

Die Mathematik untersucht dabei abstrakte Strukturen an sich auf ihre Eigenschaften und Muster. Die Abstraktion ist dabei das A und O, denn viele Eigenschaften von Gebilden wiederholen sich. Es ist dann sinnvoll, gemeinsame Eigenschaften mit Namen zu versehen (mittels Definitionen), und dann weitere Eigenschaften abzuleiten, die dann all diesen Gebilden gemeinsam sind.

Das Nützliche an der Mathematik ist, dass ihre Gesetze universell einsetzbar für viele denkbare Anwendungen ist. Diese Abstraktion ist es aber auch, die häufig schwer fällt, wenn man Mathematik lernt.

Ist eine Aussage A wahr, sagen wir auch kurz "A gilt", und ist A falsch, auch "A gilt nicht".

Wir überlegen uns nun, wie neue Aussagen aus bestehenden Aussagen (nennen wir sie stellvertretend "A","B",...) gebildet werden könnnen.

Hier sind A, B,... also *Variablen*, in die Aussagen *eingesetzt* werden können:

Z. B. "Die Aussage A ist richtig." ist eine Aussage, erst durch Einsetzen einer konkreten Aussage für A ist sie richtig oder falsch, wie z. B. "Die Aussage $0 = 1$ ist richtig." ist falsch.

Anstelle von A soll jede Aussage eingesetzt werden können, sogar die obige Aussage selbst einzusetzen, ist erlaubt:
"Die Aussage A ist richtig."
"Die Aussage "Die Aussage A ist richtig." ist richtig." usw.

Grundprinzip für die gesamte Mathematik:

Man kann immer etwas einsetzen.

Und das gilt auf jeder Ebene, wo Mathematik betrieben wird, ob in der Schule, an der Universität oder im Forschungsinstitut.

- Wenn man etwas Abstraktes verstehen will: Einfach etwas Erlaubtes konkret einsetzen und so ein **Beispiel** konstruieren, anhand dessen man einen Sachverhalt studieren kann (vgl. VK0: Deduktion).
- Hat man viele gute **konkrete** Beispiele studiert, wird einem der Sachverhalt deutlich, und man formuliert ihn abstrakt in der mathematischen Formelsprache (vgl. VK0: Induktion (philos.)).

Auf dieses Grundprinzip, das Zusammenspiel zwischen Abstraktion und konkreten Beispielen, werden wir im Vorkurs immer wieder hinweisen.

Wir fahren fort mit der Aussagenlogik. Nun möchte man aus Aussagen neue bilden können, d. h. sie sollen miteinander verknüpft werden.

Definition 5: Die Verknüpfung zweier Aussagen A und B durch "und" und "oder" (w steht abkürzend für "wahr", f für "falsch"):

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Die Abkürzung $A \wedge B$ bedeutet hier A *und* B, die Abkürzung $A \vee B$ bedeutet A *oder* B.

Die Aussage $A \wedge B$ ist also genau dann wahr, wenn die beiden Aussagen A und B wahr sind, und sonst falsch. Die Aussage $A \vee B$ ist genau dann falsch, wenn beide Aussagen A und B falsch sind, und sonst wahr.

Für die Verneinung bzw. Negation führen wir auch ein abkürzendes Symbol ein:

Definition 6: Die Aussage $\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist. (Man sagt "nicht A" für $\neg A$.)

Beispiel 7:

- Die Aussagen $A \vee (\neg A)$ und $\neg(A \wedge \neg A)$ sind immer wahr.
- Durch Kombination von $\wedge, \vee, \neg$ kann eine Vielzahl weiterer Aussagen gebildet werden: $(A \wedge B) \vee (\neg C)$, $(A \vee B) \wedge C$, $(B \vee A) \wedge A, \ldots$ Überlegen Sie sich, wie diese sprachlich ausgedrückt werden können, insbesondere wenn Sie A und B mit speziellen Aussagen belegen.
- Die Verknüpfung $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$ kann man mit "entweder A oder B" ausdrücken.

Alle weiteren Verknüpfungen zweier oder mehr Aussagen, die denkbar sind, können aus $\wedge, \vee$ und $\neg$ kombiniert werden. Einige wichtige Verknüpfungen, die aber häufig vorkommen, bekommen einen neuen Namen und eine Abkürzung.

Die wichtigste solche ist dabei die Schlussfolgerung, bzw. Folgerung oder auch Implikation genannt:

Definition 8: Eine Implikation ist eine Aussage, die wir als $A \Rightarrow B$ schreiben, und die – abhängig vom Wahrheitsgehalt zweier Aussagen A und B – den folgenden Wahrheitsgehalt hat:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wir sagen dafür auch "aus der Aussage A folgt die Aussage B", oder kurz "aus A folgt B". Diese Aussage ist wahr, wenn A und B wahr ist (aber auch, wenn A falsch ist!).
Schlussfolgern geht nun so: "Gilt $A \Rightarrow B$ und A, so folgt B".

Das heißt: Ist A wahr und auch die Aussage $A \Rightarrow B$ (d. h. für eine bestimmte Aussage B), so ist auch B wahr. Mit "gilt..." bzw. "gilt die Aussage...", ist gemeint, dass man die Wahrheit der Aussage A *annimmt*. Aus dieser wird dann auf die Wahrheit von B geschlossen.

Man kann das auch so sehen: Ist die Aussage $A \Rightarrow B$ wahr, so ist dies eine verwendbare *Schlussregel*. Gilt dann A (d. h. ist A wahr), so ist dann auch B wahr.

Man beachte dabei: $A \Rightarrow B$ ist stets wahr, wenn A falsch ist.

Es ist ein wichtiges logisches Prinzip, dass aus einer falschen Aussage A eine beliebige andere Aussage folgt: die Verknüpfung ergibt stets eine wahre Aussage ("ex falso quodlibet" = "aus Falschem folgt Beliebiges").

Denn als (mathematische) Aussage gesehen kann $A \Rightarrow B$ nur dann falsch sein, wenn A wahr und B falsch ist. Dies widerstrebt oft dem umgangsprachlichen Alltagsgebrauch von "wenn – dann", wo nicht vorgesehen ist, dass A auch falsch sein könnte.

Ein Beispiel dafür, wo wir sehen, dass diese Wahrheitstafel für $A \Rightarrow B$ mathematisch sinnvoll ist: Ein (math.) Satz lautet: Für alle reellen Zahlen x gilt: $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.

Es ist mathematisch sinnvoll, dass man vereinbart, diese Aussage sei wahr für alle reellen x, die man für x in die "Formel" einsetzen kann: Etwa für $x = 3$, dann lautet die Aussage "$3 > 2 \Rightarrow 3^2 > 4$.", was offensichtlich wahr ist.

Aber eben auch für alle anderen x, die man einsetzen kann, z.B. $x = 0$: Man erhält "$0 > 2 \Rightarrow 0^2 > 4$", ist wahr, obwohl beide Aussagen links und rechts des Pfeils falsch sind. Und auch für $x = -3$: "$-3 > 2 \Rightarrow (-3)^2 > 4$", wo die Aussage links falsch ist, die rechte aber wahr.

Bemerkung: Überlegen Sie sich, dass die Verknüpfung $(\neg A) \vee B$ denselben Wahrheitsgehalt hat wie die Aussage $A \Rightarrow B$. Wir können die Implikation $A \Rightarrow B$ also auch als Abkürzung für $(\neg A) \vee B$ verstehen.

Wichtige Dinge haben oft viele Namen. In einer Implikation $A \Rightarrow B$ nennt man A auch die *hinreichende* Bedingung für B, und B die *notwendige* Bedingung für A. Man sagt: A ist hinreichend dafür, dass B gilt, und B ist notwendig für die Gültigkeit von A. Auch "daraus folgt" oder "impliziert" kann für das Implikationszeichen gesagt werden. Die Hintereinanderreihung von mehreren Implikationen schreibt man auch einfach hintereinander, z. B. $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ als Abkürzung für $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$. Vergleichen Sie dies auch mit den Aussagen $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ und $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$!

Definition 9: Die Rückrichtung einer Implikation $A \Rightarrow B$ ist die Implikation $B \Rightarrow A$.

Die Rückrichtung ist i. a. eine andere Aussage mit anderen Wahrheitswerten. Falls mit einer Implikation auch die Rückrichtung gilt, spricht man von Äquivalenz:

Definition 10: Die Äquivalenz zweier Aussagen A und B ist die Aussage $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Man schreibt dafür abkürzend $A \Leftrightarrow B$. In einer Äquivalenz nennt man die Implikation $A \Rightarrow B$ die Hinrichtung, und $B \Rightarrow A$ die Rückrichtung der Äquivalenz.

Man formuliert eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ auch so: "A ist *genau dann* wahr, wenn B gilt". Oder auch: "A gilt genau dann, wenn B gilt". Oder: "A gilt *dann und nur dann*, wenn B gilt". Das bedeutet alles, dass A und B denselben Wahrheitsgehalt besitzen. Die Hintereinanderreihung mehrerer Äquivalenzen schreibt man auch kurz als $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \ldots$ und ist die Aussage, dass alle diese Aussagen $A, B, C, \ldots$ denselben Wahrheitswert haben. Diese Hintereinanderreihung ist die Abkürzung für
$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \wedge \ldots$

Die wichtigsten Logikregeln beschreiben nun, wie Aussagen äquivalent umformuliert werden können (Regeln 1-4, 8 und 9) bzw. wie man mit gewissen Aussagen schließen kann (Regeln 5,6 und 7). Diese Regeln selbst sind immer wahre Aussagen, egal welche Aussagen A,B,C man einsetzt. Sie lassen sich durch Vergleich der jeweiligen Wahrheitswerte beweisen, oder auch durch Zurückführen auf schon bewiesene Aussagen:

Tabelle mit den wichtigsten Logikregeln:

1	$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$
2	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
3	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
4	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
5	$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$
6	$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$
7	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
8	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
9	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Zum Klammersetzen bei Formeln mit Aussagen: Klammern können weggelassen werden gemäß folgenden Regeln: das Zeichen $\neg$ bindet stärker als $\wedge$, das Zeichen $\wedge$ bindet stärker als $\vee$, und das Zeichen $\vee$ stärker als die Zeichen $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ bzw. $\Leftrightarrow$.

Beispiel 11:

- Demnach ist z. B. $(A \Rightarrow B) \wedge C$ prinzipiell eine andere Aussage als $A \Rightarrow B \wedge C$, mit welcher die Aussage $A \Rightarrow (B \wedge C)$ gemeint ist. Tatsächlich: Denn ist A eine falsche Aussage (setzen wir gewissermaßen den Wahrheitswert "falsch" für A ein), und C falsch, so ist die erste Aussage falsch, die zweite aber wahr, deswegen müssen sie verschieden sein. Um das zu erkennen, mussten wir also nur einen Unterschied in der Wahrheitstabelle finden.

- Um zu sehen, dass zwei Aussagen äquivalent sind, müssen wir hingegen die ganze Wahrheitstabelle durchchecken: Wir beweisen die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ durch Vergleich der Wahrheitswerte von $A \Rightarrow B$ und $\neg(A \wedge \neg B)$:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
w	w	w	f	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w