Vorkurs Mathematik 2016

WWU Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik

PD Dr. K. Halupczok

Skript VK2 vom 13.9.2016

VK2: Theorie mathematischer Beweise

Definition 1: Eine Behauptung ist die Kundgebung, dass eine Aussage wahr ist, unabhängig von ihrem Wahrheitsgehalt. Dass sie tatsächlich wahr ist, wird mit einem Beweis bestätigt. Ein Beweis ist dabei die (fehlerfreie) Herleitung der Wahrheit einer Aussage (aus Axiomen und bereits als wahr bewiesenen Aussagen).

Definition 1: Eine Behauptung ist die Kundgebung, dass eine Aussage wahr ist, unabhängig von ihrem Wahrheitsgehalt. Dass sie tatsächlich wahr ist, wird mit einem Beweis bestätigt. Ein Beweis ist dabei die (fehlerfreie) Herleitung der Wahrheit einer Aussage (aus Axiomen und bereits als wahr bewiesenen Aussagen).

Definition 2: Ein (mathematischer) Satz ist die Formulierung einer wahren (mathematischen) Aussage: fast immer die Aussage, dass eine bestimmte Implikation $A \Rightarrow B$ wahr ist. Man nennt dann A die Voraussetzung, und B die Behauptung des Satzes.

Definition 1: Eine Behauptung ist die Kundgebung, dass eine Aussage wahr ist, unabhängig von ihrem Wahrheitsgehalt. Dass sie tatsächlich wahr ist, wird mit einem Beweis bestätigt. Ein Beweis ist dabei die (fehlerfreie) Herleitung der Wahrheit einer Aussage (aus Axiomen und bereits als wahr bewiesenen Aussagen).

Definition 2: Ein (mathematischer) Satz ist die Formulierung einer wahren (mathematischen) Aussage: fast immer die Aussage, dass eine bestimmte Implikation $A \Rightarrow B$ wahr ist. Man nennt dann A die Voraussetzung, und B die Behauptung des Satzes.

In einem Satz wird also die Wahrheit einer Aussage behauptet, sofern sie bewiesen werden kann. Der Beweis steht meistens gleich im Anschluss an die Formulierung des Satzes; die Wahrheit eines Satzes muss nachvollziehbar sein. Wenn Sie ein Mathematikbuch aufschlagen, wird dies dort so gemacht, meist als Trio "Definition–Satz–Beweis".

Denn für neu definierte Begriffe wird meist ein Satz formuliert, der deutlich macht, dass die Definition ein sinnvolles Konzept darstellt. Die Mathematik kann so als Sammlung von Sätzen aufgefasst werden.

Denn für neu definierte Begriffe wird meist ein Satz formuliert, der deutlich macht, dass die Definition ein sinnvolles Konzept darstellt. Die Mathematik kann so als Sammlung von Sätzen aufgefasst werden.

Beispiel 3: Ein Beispiel für einen Satz, wie er in einem Mathematik-Buch stehen könnte:
Satz: Voraussetzung: Sei n eine gerade Quadratzahl.
Behauptung: n ist durch 4 teilbar.

Denn für neu definierte Begriffe wird meist ein Satz formuliert, der deutlich macht, dass die Definition ein sinnvolles Konzept darstellt. Die Mathematik kann so als Sammlung von Sätzen aufgefasst werden.

Beispiel 3: Ein Beispiel für einen Satz, wie er in einem Mathematik-Buch stehen könnte:
Satz: Voraussetzung: Sei n eine gerade Quadratzahl.
Behauptung: n ist durch 4 teilbar.
Beweis: Ist $n = m^2$ gerade, so ist m durch 2 teilbar, also $n = m \cdot m$ durch $2 \cdot 2 = 4$ teilbar. □

Denn für neu definierte Begriffe wird meist ein Satz formuliert, der deutlich macht, dass die Definition ein sinnvolles Konzept darstellt. Die Mathematik kann so als Sammlung von Sätzen aufgefasst werden.

Beispiel 3: Ein Beispiel für einen Satz, wie er in einem Mathematik-Buch stehen könnte:
Satz: Voraussetzung: Sei n eine gerade Quadratzahl.
Behauptung: n ist durch 4 teilbar.
Beweis: Ist $n = m^2$ gerade, so ist m durch 2 teilbar, also $n = m \cdot m$ durch $2 \cdot 2 = 4$ teilbar. $\square$

Oft stehen die Worte *Voraussetzung* und *Behauptung* nicht mehr in der Formulierung im Satz dabei. Dann muss man sich selbst überlegen, was Voraussetzung und was Behauptung des Satzes ist.

Beispiel 4: Im vorigen Beispiel könnte der Satz auch heißen: "Gerade Quadratzahlen sind durch 4 teilbar."

Ein anderes Beispiel:
Satz: Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist halb so groß wie das Produkt zweier Seitenlängen.
Hier ist "Gegeben ist ein (beliebiges) rechtwinkliges Dreieck." die Voraussetzung, die Behauptung wäre: "Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt die Hälfte des Produkts zweier Seitenlängen."

Beispiel 4: Im vorigen Beispiel könnte der Satz auch heißen: "Gerade Quadratzahlen sind durch 4 teilbar."

Ein anderes Beispiel:
Satz: Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist halb so groß wie das Produkt zweier Seitenlängen.
Hier ist "Gegeben ist ein (beliebiges) rechtwinkliges Dreieck." die Voraussetzung, die Behauptung wäre: "Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt die Hälfte des Produkts zweier Seitenlängen."

Was ist nun genau ein Beweis? Wie leitet man die Wahrheit einer Aussage B her? Und: wie schreibt man das auf?

Ein Beweis der Aussage B könnte nun aus der Hintereinanderreihung von bereits bewiesenen Implikationen $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \cdots \Rightarrow C_{n+1} \Rightarrow B$ und einer anfänglichen Aussage A bestehen. Bei einem solchen Vorgehen spricht man von einem <u>direkten Beweis</u>.

Ein Beweis der Aussage B könnte nun aus der Hintereinanderreihung von bereits bewiesenen Implikationen $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \cdots \Rightarrow C_{n+1} \Rightarrow B$ und einer anfänglichen Aussage A bestehen. Bei einem solchen Vorgehen spricht man von einem direkten Beweis.

Im Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ muss A selbst nicht bewiesen sein. Sie ist ohnehin wahr, wenn A falsch ist; es muss B nur dann hergeleitet werden, wenn A wahr ist, wir also die *Annahme* machen, dass A gilt; man drückt dies sprachlich im Konjunktiv I aus: Z. B. "Es sei x eine reelle Zahl", als Abkürzung für "Angenommen, es sei x eine reelle Zahl." oder "Wir nehmen an, x sei eine reelle Zahl."

Beispiel 5: Beispiel für die Notierung eines direkten Beweises:
Satz: Vor.: Sei x eine reelle Zahl mit $x^2 = 1$.
Beh.: Dann ist $x = 1$ oder $x = -1$.

Beispiel 5: Beispiel für die Notierung eines direkten Beweises:
Satz: Vor.: Sei x eine reelle Zahl mit $x^2 = 1$.
Beh.: Dann ist $x = 1$ oder $x = -1$.
Bew.: Es gilt:
$x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \vee x + 1 = 0$
$\Rightarrow x = 1 \vee x = -1$. $\square$

Beispiel 5: Beispiel für die Notierung eines direkten Beweises:
Satz: Vor.: Sei x eine reelle Zahl mit $x^2 = 1$.
Beh.: Dann ist $x = 1$ oder $x = -1$.
Bew.: Es gilt:
$x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \vee x + 1 = 0$
$\Rightarrow x = 1 \vee x = -1$. $\square$

Bemerkung: Hier könnte überall $\Rightarrow$ auch durch $\Leftrightarrow$ ersetzt werden, was für den Beweis des Satzes aber nicht erforderlich ist. Es sei denn, die Beh. lautet $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$.

Ein spezieller Beweistyp ist der Induktionsbeweis und wird zu den direkten Beweisen gezählt. Wir werden ihn in Kapitel VK4 kennenlernen.

Ein spezieller Beweistyp ist der Induktionsbeweis und wird zu den direkten Beweisen gezählt. Wir werden ihn in Kapitel VK4 kennenlernen.

Ein weiterer Beweistyp, der zu den direkten Beweisen gezählt wird, ist der Ringsschluss und kommt seltener vor. Nämlich dann, wenn eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ von drei Aussagen als Satz behauptet wird, genügt es, $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$ zu beweisen. Den Beweis der Rückrichtungen $A \Leftarrow B \Leftarrow C$ kann man sich dann sparen. (Mit mehr als drei Aussagen entsprechend.) Der Ringschluss sollte nicht mit dem Zirkelschluss verwechselt werden, bei dem fälschlicherweise die Gültigkeit der Behauptung im Beweis verwendet wird, was natürlich nicht erlaubt ist.

Ein spezieller Beweistyp ist der Induktionsbeweis und wird zu den direkten Beweisen gezählt. Wir werden ihn in Kapitel VK4 kennenlernen.

Ein weiterer Beweistyp, der zu den direkten Beweisen gezählt wird, ist der Ringsschluss und kommt seltener vor. Nämlich dann, wenn eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ von drei Aussagen als Satz behauptet wird, genügt es, $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$ zu beweisen. Den Beweis der Rückrichtungen $A \Leftarrow B \Leftarrow C$ kann man sich dann sparen. (Mit mehr als drei Aussagen entsprechend.) Der Ringschluss sollte nicht mit dem Zirkelschluss verwechselt werden, bei dem fälschlicherweise die Gültigkeit der Behauptung im Beweis verwendet wird, was natürlich nicht erlaubt ist.

Alle anderen Beweisarten werden indirekt genannt. Das ist zum einen der Kontrapositionsbeweis, und zum andereren der Widerspruchsbeweis.

Beim Kontrapositionsbeweis wird anstelle von $A \Rightarrow B$ die gleichwertige[1] Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ direkt gezeigt. Das Prinzip lässt sich auch als $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ schreiben, dieses ist oben als Logikregel Nr. 4 notiert.

[1] d. h. äquivalente

Beim Kontrapositionsbeweis wird anstelle von $A \Rightarrow B$ die gleichwertige[1] Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ direkt gezeigt. Das Prinzip lässt sich auch als $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ schreiben, dieses ist oben als Logikregel Nr. 4 notiert.

Beim Widerspruchsbeweis wird aus der Annahme $\neg B$, d. h. dass B falsch wäre, eine falsche Aussage hergeleitet (ein sogenannter Widerspruch, wie etwa $0 = 1$, $A \wedge \neg A$ usw.). Nach dem Kontrapositionsprinzip ist B dann wahr, also bewiesen.

[1] d. h. äquivalente

Beim Kontrapositionsbeweis wird anstelle von $A \Rightarrow B$ die gleichwertige[1] Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ direkt gezeigt. Das Prinzip lässt sich auch als $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ schreiben, dieses ist oben als Logikregel Nr. 4 notiert.

Beim Widerspruchsbeweis wird aus der Annahme $\neg B$, d. h. dass B falsch wäre, eine falsche Aussage hergeleitet (ein sogenannter Widerspruch, wie etwa $0 = 1$, $A \wedge \neg A$ usw.). Nach dem Kontrapositionsprinzip ist B dann wahr, also bewiesen.

Im häufigen Fall, dass der zu beweisende Satz eine Implikation $A \Rightarrow B$ als Aussage hat, lautet die Annahme $A \wedge \neg B$. Dann wird *daraus* eine falsche Aussage direkt hergeleitet.

[1] d. h. äquivalente

Beim Kontrapositionsbeweis wird anstelle von $A \Rightarrow B$ die gleichwertige[1] Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ direkt gezeigt. Das Prinzip lässt sich auch als $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ schreiben, dieses ist oben als Logikregel Nr. 4 notiert.

Beim Widerspruchsbeweis wird aus der Annahme $\neg B$, d. h. dass B falsch wäre, eine falsche Aussage hergeleitet (ein sogenannter Widerspruch, wie etwa $0 = 1$, $A \wedge \neg A$ usw.). Nach dem Kontrapositionsprinzip ist B dann wahr, also bewiesen.

Im häufigen Fall, dass der zu beweisende Satz eine Implikation $A \Rightarrow B$ als Aussage hat, lautet die Annahme $A \wedge \neg B$. Dann wird *daraus* eine falsche Aussage direkt hergeleitet.

Denn beachten Sie, dass
$$\neg(A \wedge \neg B) \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee (\neg(\neg B)) \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee B \;\Leftrightarrow\; (A \Rightarrow B).$$

[1] d. h. äquivalente

Der Widerspruchsbeweis (zum Beweis einer Aussage B) wird so notiert, dass man die Annahme macht, dass $\neg B$ gelte. Nach der Herleitung eines Widerspruchs ist der Beweis dann beendet. Man schreibt dann auch, man erhält einen "Widerspruch". Gelegentlich schreibt man auch einen Widerspruchspfeil ("↯") an die erhaltene falsche Aussage.

Der Widerspruchsbeweis (zum Beweis einer Aussage B) wird so notiert, dass man die Annahme macht, dass $\neg B$ gelte. Nach der Herleitung eines Widerspruchs ist der Beweis dann beendet. Man schreibt dann auch, man erhält einen "Widerspruch". Gelegentlich schreibt man auch einen Widerspruchspfeil ("$\lightning$") an die erhaltene falsche Aussage.

In kurzen indirekten Beweisen kann man sprachlich den deutschen Konjuktiv II (="Irrealis") benutzen, mit dem im Deutschen eine irreale Annahme ausgedrückt wird. In längeren Beweisen drückt meistens nur die Annahme selbst im Konjuktiv aus.

Beispiel 6: Beispielsätze, die den Konjunktiv (II bzw. I) enthalten:

1. "Wenn n ungerade wäre, dann wäre n^2 keine gerade Quadratzahl."
2. "Es sei n eine gerade Zahl.", ist die Abkürzung für "Angenommen, es sei n eine gerade Zahl." bzw. für "Wir nehmen an, n sei eine gerade Zahl."

Beispiel 6: Beispielsätze, die den Konjunktiv (II bzw. I) enthalten:

1. "Wenn n ungerade wäre, dann wäre n^2 keine gerade Quadratzahl."
2. "Es sei n eine gerade Zahl.", ist die Abkürzung für "Angenommen, es sei n eine gerade Zahl." bzw. für "Wir nehmen an, n sei eine gerade Zahl."

Der Konjunktiv I von "es gilt" und "es ist" lautet "es gelte" und "es sei". Im Konjunktiv I wird häufig die Voraussetzung eines Satzes formuliert.

Beispiel 6: Beispielsätze, die den Konjunktiv (II bzw. I) enthalten:

1. "Wenn n ungerade wäre, dann wäre n^2 keine gerade Quadratzahl."
2. "Es sei n eine gerade Zahl.", ist die Abkürzung für "Angenommen, es sei n eine gerade Zahl." bzw. für "Wir nehmen an, n sei eine gerade Zahl."

Der Konjunktiv I von "es gilt" und "es ist" lautet "es gelte" und "es sei". Im Konjunktiv I wird häufig die Voraussetzung eines Satzes formuliert.

Zur Markierung des Endes eines Beweises schreibt man üblicherweise ein Kästchen an den rechten Seitenrand, oder die Abkürzung q.e.d. für "quod erat demonstrandum" = "was zu beweisen war", auf deutsch auch "w.z.b.w.".

Beispiel 7: Beispiel für die Notierung eines Widerspruchsbeweises:
Satz: Vor.: Sei k eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, und $n := 10^k - 1$.
Beh.: Dann ist n keine Quadratzahl.

Beweis (indirekt, durch Widerspruch): Ann.: n wäre eine Quadratzahl.

Beispiel 7: Beispiel für die Notierung eines Widerspruchsbeweises:
Satz: Vor.: Sei k eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, und $n := 10^k - 1$.
Beh.: Dann ist n keine Quadratzahl.

Beweis (indirekt, durch Widerspruch): Ann.: n wäre eine Quadratzahl.

Da $n = 10^k - 1$ ungerade ist, ist n also eine ungerade Quadratzahl. Ungerade Quadratzahlen sind von der Form $4m + 1$, also ist $10^k - 1 = 4m + 1$, also $10^k = 4m + 2$, also ist 10^k nicht durch 4 teilbar, im Widerspruch dazu, dass k mindestens gleich 2 ist und weswegen 10^k den Faktor 2 mindestens zweimal enthält. $\square$

Beispiel 8:

- Satz: A, B seien Aussagen. Dann gilt $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Beispiel 8:

- Satz: A, B seien Aussagen. Dann gilt $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

  Beweis (direkt): $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B \Leftrightarrow B \vee \neg A \Leftrightarrow \neg(\neg B) \vee \neg A \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. $\square$

Beispiel 8:

- Satz: A, B seien Aussagen. Dann gilt
  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

  Beweis (direkt): $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B \Leftrightarrow B \vee \neg A \Leftrightarrow$
  $\neg(\neg B) \vee \neg A \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. $\square$
- Satz: Vor.: A, B, C seien Aussagen.
  Beh.: $(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$.

Beispiel 8:

- Satz: A, B seien Aussagen. Dann gilt $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

  Beweis (direkt): $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B \Leftrightarrow B \vee \neg A \Leftrightarrow \neg(\neg B) \vee \neg A \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. $\square$
- Satz: Vor.: A, B, C seien Aussagen.
  Beh.: $(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$.

  Beweis (direkt):
  $(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \vee C$
  $\Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee C) \Leftrightarrow \neg A \vee (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$. $\square$

Beispiel 8:

- Satz: A, B seien Aussagen. Dann gilt $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

  Beweis (direkt): $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B \Leftrightarrow B \vee \neg A \Leftrightarrow \neg(\neg B) \vee \neg A \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. □
- Satz: Vor.: A, B, C seien Aussagen.
  Beh.: $(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$.

  Beweis (direkt):
  $(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \vee C$
  $\Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee C) \Leftrightarrow \neg A \vee (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$. □

Bem.: Hier müssen die Äquivalenzpfeile hingeschrieben werden, Folgepfeile reichen nicht.

Beispiel 9: Satz: Wenn $x > 1$ und $y > -1$ reelle Zahlen sind, dann ist $x + y > 0$.

Beispiel 9: Satz: Wenn $x > 1$ und $y > -1$ reelle Zahlen sind, dann ist $x + y > 0$.

Beweis: Vor. $\Rightarrow x > 1 \wedge y > -1 \Rightarrow x + y > 1 + (-1) = 0$. $\square$

Beispiel 9: Satz: Wenn $x > 1$ und $y > -1$ reelle Zahlen sind, dann ist $x + y > 0$.
Beweis: Vor. $\Rightarrow x > 1 \wedge y > -1 \Rightarrow x + y > 1 + (-1) = 0$. $\square$

Bem.: Der letzte Folgepfeil kann nicht durch einen Äquivalenzpfeil ersetzt werden! Die Rückrichtung gilt nicht, denn für $x = 0$, $y = 1$ ist $x + y = 1 > 0$ wahr, aber $x > 1$ falsch.

Beispiel 10:

Satz: Ist n eine ungerade Quadratzahl, dann ist $n - 1$ durch 8 teilbar.

Beispiel 10:

Satz: Ist n eine ungerade Quadratzahl, dann ist $n-1$ durch 8 teilbar.

oder: Satz: Es sei n eine ungerade Quadratzahl. Dann ist $n-1$ durch 8 teilbar.

Beispiel 10:

Satz: Ist n eine ungerade Quadratzahl, dann ist $n-1$ durch 8 teilbar.

oder: Satz: Es sei n eine ungerade Quadratzahl. Dann ist $n-1$ durch 8 teilbar.

oder: Satz: Vor.: n sei ungerade Quadratzahl. Beh.: $n-1$ ist durch 8 teilbar.

Beispiel 10:

Satz: Ist n eine ungerade Quadratzahl, dann ist $n - 1$ durch 8 teilbar.

oder: Satz: Es sei n eine ungerade Quadratzahl. Dann ist $n - 1$ durch 8 teilbar.

oder: Satz: Vor.: n sei ungerade Quadratzahl. Beh.: $n - 1$ ist durch 8 teilbar.

oder: Satz: Vor.: n sei eine Quadratzahl.
Beh.: Ist n ungerade, dann ist $n - 1$ durch 8 teilbar.

Beispiel 10:

Satz: Ist n eine ungerade Quadratzahl, dann ist $n-1$ durch 8 teilbar.

oder: Satz: Es sei n eine ungerade Quadratzahl. Dann ist $n-1$ durch 8 teilbar.

oder: Satz: Vor.: n sei ungerade Quadratzahl. Beh.: $n-1$ ist durch 8 teilbar.

oder: Satz: Vor.: n sei eine Quadratzahl.
Beh.: Ist n ungerade, dann ist $n-1$ durch 8 teilbar.

Beweis (direkt): Es sei $n = m^2$ mit einer natürlichen Zahl m. Ist n ungerade, dann muss auch m ungerade sein, etwa von der Form $m = 2k-1$ mit einer natürlichen Zahl k. Dann ist $n-1 = m^2-1 = (2k-1)^2-1 = 4k^2-4k+1-1 = 4k(k-1)$ durch 8 teilbar, weil k oder $k-1$ gerade ist. $\square$

Beispiel 11: Ein weiteres Beispiel, wie ein Widerspruchsbeweis aufgeschrieben werden kann:

Beispiel 11: Ein weiteres Beispiel, wie ein Widerspruchsbeweis aufgeschrieben werden kann:

Satz: $p = 2$ ist die einzige gerade Primzahl.
Beweis (durch Widerspruch):
Annahme: Es sei $p > 2$ eine weitere gerade Primzahl. Dann ist p durch 2 teilbar, also $p = 2 \cdot n$ mit einer natürlichen Zahl n. Da $p > 2$, ist $n > 1$, also ist p eine zusammengesetzte Zahl im Widerspruch zur Annahme, dass p eine Primzahl sei. $\square$

Beispiel 11: Ein weiteres Beispiel, wie ein Widerspruchsbeweis aufgeschrieben werden kann:

Satz: $p = 2$ ist die einzige gerade Primzahl.
Beweis (durch Widerspruch):
Annahme: Es sei $p > 2$ eine weitere gerade Primzahl. Dann ist p durch 2 teilbar, also $p = 2 \cdot n$ mit einer natürlichen Zahl n. Da $p > 2$, ist $n > 1$, also ist p eine zusammengesetzte Zahl im Widerspruch zur Annahme, dass p eine Primzahl sei. $\square$

Derselbe Beweis, etwas mehr in Formeln ("formal") aufgeschrieben:
Bew.: Ann.: Sei $p \in \mathbb{P}$, $2 \mid p$ und $p > 2$. Dann $\exists n \in \mathbb{N} : p = 2 \cdot n$. Dann ist $n > 1$, weil $p > 2$. Dann ist p zusammengesetzt, $\lightning$. $\square$

Beispiel 11: Ein weiteres Beispiel, wie ein Widerspruchsbeweis aufgeschrieben werden kann:

Satz: $p = 2$ ist die einzige gerade Primzahl.
Beweis (durch Widerspruch):
Annahme: Es sei $p > 2$ eine weitere gerade Primzahl. Dann ist p durch 2 teilbar, also $p = 2 \cdot n$ mit einer natürlichen Zahl n. Da $p > 2$, ist $n > 1$, also ist p eine zusammengesetzte Zahl im Widerspruch zur Annahme, dass p eine Primzahl sei. $\square$

Derselbe Beweis, etwas mehr in Formeln ("formal") aufgeschrieben:
Bew.: Ann.: Sei $p \in \mathbb{P}$, $2 \mid p$ und $p > 2$. Dann $\exists n \in \mathbb{N} : p = 2 \cdot n$. Dann ist $n > 1$, weil $p > 2$. Dann ist p zusammengesetzt, $\lightning$. $\square$

Ebenso, aber sprachlich ausgedrückt:
Beweis: Wäre p sonst eine weitere gerade Primzahl, so wäre die gerade Zahl $p > 2$ durch 2 teilbar, also keine Primzahl, im Widerspruch zur Annahme, dass p eine Primzahl sei. $\square$

Noch ein Beispiel für einen direkten Beweis:
Beispiel 12:
Satz: Vor.: Sei x eine reelle Zahl.

Beh.: Wenn $x^2 = 6x - 9$ ist, dann ist $x^2 = 9$.

Noch ein Beispiel für einen direkten Beweis:
Beispiel 12:
Satz: Vor.: Sei x eine reelle Zahl.

Beh.: Wenn $x^2 = 6x - 9$ ist, dann ist $x^2 = 9$.

Bew.: Es gilt:

$$\begin{aligned} & x^2 = 6x - 9 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 6x + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-3)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 3 \\ \Rightarrow\ & x^2 = 9. \end{aligned}$$

$\square$

Noch ein Beispiel für einen direkten Beweis:

Beispiel 12:

Satz: Vor.: Sei x eine reelle Zahl.

Beh.: Wenn $x^2 = 6x - 9$ ist, dann ist $x^2 = 9$.

Bew.: Es gilt:

$$\begin{aligned} & x^2 = 6x - 9 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 6x + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-3)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 3 \\ \Rightarrow\ & x^2 = 9. \end{aligned}$$

$\square$

Hier im letzten Schritt darf $\Rightarrow$ nicht durch $\Leftrightarrow$ ersetzt werden.