Vorkurs Mathematik 2016

WWU Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik

PD Dr. K. Halupczok

Skript VK4 vom 20.9.2016

VK4: Zahlen und Zahlbereiche, vollständige Induktion

Wir behandeln in diesem Paragraphen die Zahlbereiche

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

und die Darstellung von Zahlen.

Wir behandeln in diesem Paragraphen die Zahlbereiche

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

und die Darstellung von Zahlen.
Der Aufbau des Zahlensystems ist das Fundament der Arithmetik als Teilgebiet der Mathematik. Wir besprechen hier, wie im Prinzip das Zahlensystem axiomatisch aufgebaut werden kann, beginnend mit den natürlichen Zahlen: jeder Zahlbereich wird als Erweiterung des jeweils vorigen Zahlbereichs gewonnen. Dabei werfen wir auch ein Blick auf die Frage, wie Zahlen am besten und üblicherweise dargestellt werden (können).

Wir behandeln in diesem Paragraphen die Zahlbereiche

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

und die Darstellung von Zahlen.
Der Aufbau des Zahlensystems ist das Fundament der Arithmetik als Teilgebiet der Mathematik. Wir besprechen hier, wie im Prinzip das Zahlensystem axiomatisch aufgebaut werden kann, beginnend mit den natürlichen Zahlen: jeder Zahlbereich wird als Erweiterung des jeweils vorigen Zahlbereichs gewonnen. Dabei werfen wir auch ein Blick auf die Frage, wie Zahlen am besten und üblicherweise dargestellt werden (können).
Wir werden hier nicht alle Details besprechen, aber die wichtigsten Fakten nennen, auf die es ankommt und denen Sie später begegnen werden.

VK4.1:

Endliche Mengen und die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, vollständige Induktion

Beim Zählen werden Objekte zu Mengen zusammengefasst. Durch Abstraktion (gleiche Anzahl der Elemente zweier endlicher Mengen) gelangt man zum Begriff der natürlichen Zahl. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet, 1 ist die kleinste natürliche Zahl (gelegentlich nimmt man auch die 0 dazu, wir hier nicht).

Beim Zählen werden Objekte zu Mengen zusammengefasst. Durch Abstraktion (gleiche Anzahl der Elemente zweier endlicher Mengen) gelangt man zum Begriff der natürlichen Zahl. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet, 1 ist die kleinste natürliche Zahl (gelegentlich nimmt man auch die 0 dazu, wir hier nicht).
Die heute übliche, axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen geht auf Peano zurück und kommt mit nur 5 Axiomen aus. Für uns ist hier nur das 5. Axiom interessant.

Beim Zählen werden Objekte zu Mengen zusammengefasst. Durch Abstraktion (gleiche Anzahl der Elemente zweier endlicher Mengen) gelangt man zum Begriff der natürlichen Zahl. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet, 1 ist die kleinste natürliche Zahl (gelegentlich nimmt man auch die 0 dazu, wir hier nicht).
Die heute übliche, axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen geht auf Peano zurück und kommt mit nur 5 Axiomen aus. Für uns ist hier nur das 5. Axiom interessant.
Bezeichnet man den Nachfolger einer natürlichen Zahl n mit $n+1$, so besagt das 5. Axiom (hier bezeichnet $E(x)$ eine beliebige Aussage, die von einer Zahl x abhängen kann):

$$\forall E(x) : \Big(E(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : (E(n) \Rightarrow E(n+1))\Big) \Rightarrow \big(\forall n \in \mathbb{N} : E(n)\big)$$

Dieses 5. Peano-Axiom ist das Prinzip der vollständigen Induktion. Es besagt:

Satz

(von der vollständigen Induktion):

Vor.: Sei E eine Aussage über natürliche Zahlen wie folgt:

(1) *Die Aussage E gilt für die natürliche Zahl 1.*

(2) *Gilt die Aussage E für die natürliche Zahl n, dann auch für ihren Nachfolger $n+1$.*

Beh.: Die Aussage E gilt für alle natürlichen Zahlen.

Für die Beweistheorie bedeutet dies folgendes:

Ist ein Satz zu beweisen, der $E(n)$ für alle natürlichen Zahlen behauptet, so genügt es, erst $E(1)$ zu beweisen (Induktionsanfang), und dann aus der Annahme der Gültigkeit von $E(n)$ die Gültigkeit von $E(n+1)$ herzuleiten (Induktionsschritt, d. h. der Beweis der Implikation $E(n) \Rightarrow E(n+1)$).

Für die Beweistheorie bedeutet dies folgendes:

Ist ein Satz zu beweisen, der $E(n)$ für alle natürlichen Zahlen behauptet, so genügt es, erst $E(1)$ zu beweisen (Induktionsanfang), und dann aus der Annahme der Gültigkeit von $E(n)$ die Gültigkeit von $E(n+1)$ herzuleiten (Induktionsschritt, d. h. der Beweis der Implikation $E(n) \Rightarrow E(n+1)$).

Dieses Beweisverfahren nennt man vollständige Induktion. Ein solcher Induktionsbeweis ist also zweiteilig, er besteht demnach aus zwei Beweisen, nämlich dem *Induktionsanfang* und dem *Induktionsschritt*.

Eine gemachte vollständige Induktion liefert dann sukzessive die Wahrheit aller Aussagen $E(n)$, einfach der Reihe nach:

$$\underbrace{E(1)}_{\text{Induktionsanfang}} \overset{\text{Ind.Schritt, } n=1}{\Rightarrow} E(2) \overset{\text{Ind.Schritt, } n=2}{\Rightarrow} E(3) \overset{\text{Ind.Schritt, } n=3}{\Rightarrow} E(4) \ldots$$

Dies ist lediglich eine Veranschaulichung der Induktion, kein Beweis. Wir akzeptieren die Induktion als Axiom, denn einen echten Beweis (etwa aus den anderen Axiomen) können wir nicht geben.

Eine gemachte vollständige Induktion liefert dann sukzessive die Wahrheit aller Aussagen $E(n)$, einfach der Reihe nach:

$$\underbrace{E(1)}_{\text{Induktionsanfang}} \overset{\text{Ind.Schritt, } n=1}{\Rightarrow} E(2) \overset{\text{Ind.Schritt, } n=2}{\Rightarrow} E(3) \overset{\text{Ind.Schritt, } n=3}{\Rightarrow} E(4) \ldots$$

Dies ist lediglich eine Veranschaulichung der Induktion, kein Beweis. Wir akzeptieren die Induktion als Axiom, denn einen echten Beweis (etwa aus den anderen Axiomen) können wir nicht geben.

Mit dem Wort "Induktion" meint man in der Mathematik fast immer die vollständige Induktion in diesem Sinne.

Beispiel 1: **Satz:** Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Beispiel 1: **Satz:** Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Beweis: (Durch vollständige Induktion)

Induktionsanfang: Für $n = 1$ besteht die linke Seite der Gleichung nur aus dem einzigen Summanden 1. Und dieser ist gleich 1^2, der rechten Seite der Gleichung.

Beispiel 1: **Satz:** Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Beweis: (Durch vollständige Induktion)

Induktionsanfang: Für $n = 1$ besteht die linke Seite der Gleichung nur aus dem einzigen Summanden 1. Und dieser ist gleich 1^2, der rechten Seite der Gleichung.

Induktionsschritt: Sei die behauptete Gleichung wahr für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsannahme). Zu zeigen ist, dass sie dann auch für den Nachfolger $n + 1$ gilt. Dazu bilden wir die linke Seite der Gleichung mit $n + 1$ anstelle von n und formen weiter um, bis wir die (für $n + 1$) behauptete rechte Seite erhalten:

$$
\begin{aligned}
& 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) \\
= \quad & \underbrace{1 + 3 + \cdots + (2n - 1)}_{= n^2 \text{ unter Verwendung der Ind.-ann.}} + (2n + 2 - 1) \\
= \; & n^2 + 2n + 1 \overset{\text{bin. Formel}}{=} (n + 1)^2.
\end{aligned}
$$

Im letzten Beispiel haben wir bewiesen, dass $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$, $\ldots$, $1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = 50^2$,$\ldots$ alles wahre Aussagen sind.

Im letzten Beispiel haben wir bewiesen, dass $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$, ..., $1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = 50^2$,... alles wahre Aussagen sind.

Beispiel 2: Derselbe Beweis, wie man ihn auch kürzer aufschreiben kann:

Beweis: (vollst. Ind.)

$\underline{n = 1:}$ $l.S. = 1 = 1^2 = r.S.$

Im letzten Beispiel haben wir bewiesen, dass $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$, ..., $1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = 50^2$,... alles wahre Aussagen sind.

Beispiel 2: Derselbe Beweis, wie man ihn auch kürzer aufschreiben kann:

Beweis: (vollst. Ind.)

$\underline{n = 1:}$ $\quad l.S. = 1 = 1^2 = r.S.$

$\underline{n \to n+1:}$ $\quad l.S. = 1 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) \overset{\text{Ind.ann.}}{=}$

$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 = r.S.$ $\square$

Im letzten Beispiel haben wir bewiesen, dass $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$, ..., $1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = 50^2$,... alles wahre Aussagen sind.

Beispiel 2: Derselbe Beweis, wie man ihn auch kürzer aufschreiben kann:

Beweis: (vollst. Ind.)

$\underline{n = 1:}$ $\quad l.S. = 1 = 1^2 = r.S.$

$\underline{n \to n+1:}$ $\quad l.S. = 1 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) \overset{\text{Ind.ann.}}{=}$

$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 = r.S.$ $\square$

Bem.: Zur Verdeutlichung habe ich hier noch $l.S.$ und $r.S.$ für "linke Seite" und "rechte Seite" eingefügt. Das könnte man auch weglassen; es hilft aber, die Argumentation in so einer Kurzform zu verstehen. Versuchen Sie am Anfang, lieber lange Versionen wie im Bsp. davor aufzuschreiben; dann versteht Ihr Korrektor leichter, was gemeint ist.

Beispiel 3: Eine lehrreiche Übung ist die folgende: Versuchen Sie, auf dieselbe Weise mit vollständiger Induktion den folgenden Satz zu beweisen:

Satz: $\forall n, x \in \mathbb{N} : (1 + x + x^2 + \cdots + x^n)(x - 1) = x^{n+1} - 1.$

Beispiel 3: Eine lehrreiche Übung ist die folgende: Versuchen Sie, auf dieselbe Weise mit vollständiger Induktion den folgenden Satz zu beweisen:
Satz: $\forall n, x \in \mathbb{N} : (1 + x + x^2 + \cdots + x^n)(x - 1) = x^{n+1} - 1$.

Nützlich am 5. Peano-Axiom ist auch, dass es sogenannte **Rekursive Definitionen** möglich macht. Was damit gemeint ist, werden wir im Kapitel VK6.2 kennen lernen.

Beispiel 3: Eine lehrreiche Übung ist die folgende: Versuchen Sie, auf dieselbe Weise mit vollständiger Induktion den folgenden Satz zu beweisen:
Satz: $\forall n, x \in \mathbb{N} : (1 + x + x^2 + \cdots + x^n)(x - 1) = x^{n+1} - 1$.

Nützlich am 5. Peano-Axiom ist auch, dass es sogenannte **Rekursive Definitionen** möglich macht. Was damit gemeint ist, werden wir im Kapitel VK6.2 kennen lernen.

Über die Peano-Axiome kann man auf den natürlichen Zahlen nun die Addition ($+$, d. h. "plus") und die Multiplikation ($\cdot$, d. h. "mal") definieren, so wie Sie sie aus der Schule kennen. Man definiert dabei $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$, $4 := 3 + 1$ usw. Man definiert weiter eine (nichtnatürliche) Zahl 0 durch die Eigenschaft $0 + n = n + 0 = n$, und schreibt $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dabei werden die bekannten Rechenregeln erfüllt, die man dann aus den Peano-Axiomen und der Definition von $+$, $\cdot$ herleiten (also beweisen) kann. Bemerkenswert, dass nur fünf Axiome dafür reichen!

Dabei werden die bekannten Rechenregeln erfüllt, die man dann aus den Peano-Axiomen und der Definition von $+$, $\cdot$ herleiten (also beweisen) kann. Bemerkenswert, dass nur fünf Axiome dafür reichen!
Das schenken wir uns hier aber und verweisen auf den späteren Stoff der Anfängervorlesungen. Für uns sind $+$ und $\cdot$ die gewöhnlichen Verknüpfungen, die wir unter "mal" und "plus" verstehen.

Die wichtigsten Rechenregeln fassen wir hier wie folgt in einer Tabelle zusammen (n, m und k seien beliebige natürliche Zahlen oder 0):

Die wichtigsten Rechenregeln fassen wir hier wie folgt in einer Tabelle zusammen (n, m und k seien beliebige natürliche Zahlen oder 0):

	Addition	Multiplikation
1	$(n+m)+k = n+(m+k)$	$(nm)k = n(mk)$
2	$n+m = m+n$	$n \cdot m = m \cdot n$
3	$n+0 = 0+n = n$	$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$
4	$n+k = m+k \Rightarrow n = m$	$k \neq 0 \Rightarrow (nk = mk \Rightarrow n = m)$

Die wichtigsten Rechenregeln fassen wir hier wie folgt in einer Tabelle zusammen (n, m und k seien beliebige natürliche Zahlen oder 0):

	Addition	Multiplikation
1	$(n+m)+k = n+(m+k)$	$(nm)k = n(mk)$
2	$n+m = m+n$	$n \cdot m = m \cdot n$
3	$n+0 = 0+n = n$	$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$
4	$n+k = m+k \Rightarrow n = m$	$k \neq 0 \Rightarrow (nk = mk \Rightarrow n = m)$

Und eine Regel mit beiden Verknüpfungen:

5	$k(m+n) = km + kn$

(Malpunkte kann man weglassen, und beim Klammersetzen gilt: "mal" bindet stärker als "plus", so dass manche Klammern weggelassen werden können: Im Ausdruck $(n \cdot m) + k$ kann man die Klammern weglassen, nicht aber in $n \cdot (m + k)$.)

(Malpunkte kann man weglassen, und beim Klammersetzen gilt: "mal" bindet stärker als "plus", so dass manche Klammern weggelassen werden können: Im Ausdruck $(n \cdot m) + k$ kann man die Klammern weglassen, nicht aber in $n \cdot (m + k)$.)

Natürlich kann man aus diesen Regeln wieder weitere herleiten usw. Z. B. die binomischen Formeln, wissen Sie noch, wie?

(Malpunkte kann man weglassen, und beim Klammersetzen gilt: "mal" bindet stärker als "plus", so dass manche Klammern weggelassen werden können: Im Ausdruck $(n \cdot m) + k$ kann man die Klammern weglassen, nicht aber in $n \cdot (m + k)$.)

Natürlich kann man aus diesen Regeln wieder weitere herleiten usw. Z. B. die binomischen Formeln, wissen Sie noch, wie?

Wir gehen noch auf die sogenannte Ordnungsrelation $\leq$ ein: Man kann natürliche Zahlen ihrer Größe nach vergleichen bzw. anordnen. Wir definieren das Zeichen $\leq$ wie folgt für $n, m \in \mathbb{N}_0$:

(Malpunkte kann man weglassen, und beim Klammersetzen gilt: "mal" bindet stärker als "plus", so dass manche Klammern weggelassen werden können: Im Ausdruck $(n \cdot m) + k$ kann man die Klammern weglassen, nicht aber in $n \cdot (m + k)$.)

Natürlich kann man aus diesen Regeln wieder weitere herleiten usw. Z. B. die binomischen Formeln, wissen Sie noch, wie?

Wir gehen noch auf die sogenannte Ordnungsrelation $\leq$ ein: Man kann natürliche Zahlen ihrer Größe nach vergleichen bzw. anordnen. Wir definieren das Zeichen $\leq$ wie folgt für $n, m \in \mathbb{N}_0$:

Definition 4:

$n \leq m :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : n + k = m,$

$n \geq m :\Leftrightarrow m \leq n,$

$n < m :\Leftrightarrow n \leq m \wedge n \neq m,$

$n > m :\Leftrightarrow n \geq m \wedge n \neq m.$

Folgende Aussagen mit Ungleichungen sind wahr (für alle $m, n, k \in \mathbb{N}_0$):

$m \leq m$
$m \leq n \wedge n \leq m \Rightarrow m = n$
$m \leq n \wedge n \leq k \Rightarrow m \leq k$

Folgende Aussagen mit Ungleichungen sind wahr (für alle $m, n, k \in \mathbb{N}_0$):

$m \leq m$
$m \leq n \wedge n \leq m \Rightarrow m = n$
$m \leq n \wedge n \leq k \Rightarrow m \leq k$

Zur Darstellung natürlicher Zahlen:
Wir schreiben natürliche Zahlen als Ziffernfolge im 10er-System auf, d.h., ist $g = 10$, so ist jede natürliche Zahl schreibbar als

$$a_k \cdot g^k + a_{k-1} \cdot g^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot g^1 + a_0$$

mit einem $k \in \mathbb{N}_0$ und $k + 1$ vielen Ziffern
$a_0, \ldots, a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Folgende Aussagen mit Ungleichungen sind wahr (für alle $m, n, k \in \mathbb{N}_0$):

$m \leq m$
$m \leq n \wedge n \leq m \Rightarrow m = n$
$m \leq n \wedge n \leq k \Rightarrow m \leq k$

Zur Darstellung natürlicher Zahlen:
Wir schreiben natürliche Zahlen als Ziffernfolge im 10er-System auf, d.h., ist $g = 10$, so ist jede natürliche Zahl schreibbar als

$$a_k \cdot g^k + a_{k-1} \cdot g^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot g^1 + a_0$$

mit einem $k \in \mathbb{N}_0$ und $k + 1$ vielen Ziffern $a_0, \ldots, a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Diese sogenannte g-adische Darstellung ist *eindeutig*, d. h. eine natürliche Zahl besitzt auch nur höchstens eine solche Darstellung. Und: Anstelle von $g = 10$ kann man jede andere natürliche Zahl > 1 zur Darstellung verwenden, Computer benutzen etwa $g = 2$ oder $g = 16$. Man nennt g die Basis der g-adischen Darstellung.

Man kann natürliche Zahlen auch als Produkt von kleinsten, nicht weiter zerlegbaren natürlichen Zahlen darstellen, den Primzahlen. Auch eine solche Darstellung ist eindeutig. Für die Zahlentheorie ist diese Darstellung mithilfe der Primfaktorzerlegung sehr wichtig, als praktische Methode aber völlig ungeeignet. Denn: die Primfaktorzerlegung von Zahlen mit ein paar hundert Stellen ist rechnerisch bereits so schwer, dass Computer Jahrzehnte bräuchten, um diese zu berechnen. Diese Tatsache benutzt man heutzutage in der Verschlüsselungstechnik.

Man kann natürliche Zahlen auch als Produkt von kleinsten, nicht weiter zerlegbaren natürlichen Zahlen darstellen, den Primzahlen. Auch eine solche Darstellung ist eindeutig. Für die Zahlentheorie ist diese Darstellung mithilfe der Primfaktorzerlegung sehr wichtig, als praktische Methode aber völlig ungeeignet. Denn: die Primfaktorzerlegung von Zahlen mit ein paar hundert Stellen ist rechnerisch bereits so schwer, dass Computer Jahrzehnte bräuchten, um diese zu berechnen. Diese Tatsache benutzt man heutzutage in der Verschlüsselungstechnik.

Nun möchte man im Bereich der natürlichen Zahlen auch das Zeichen $-$ "Minus" einführen. Dies macht man wie folgt.

Man kann natürliche Zahlen auch als Produkt von kleinsten, nicht weiter zerlegbaren natürlichen Zahlen darstellen, den Primzahlen. Auch eine solche Darstellung ist eindeutig. Für die Zahlentheorie ist diese Darstellung mithilfe der Primfaktorzerlegung sehr wichtig, als praktische Methode aber völlig ungeeignet. Denn: die Primfaktorzerlegung von Zahlen mit ein paar hundert Stellen ist rechnerisch bereits so schwer, dass Computer Jahrzehnte bräuchten, um diese zu berechnen. Diese Tatsache benutzt man heutzutage in der Verschlüsselungstechnik.

Nun möchte man im Bereich der natürlichen Zahlen auch das Zeichen $-$ "Minus" einführen. Dies macht man wie folgt.

Definition 5: Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$. Die Zahl $n - m$ sei diejenige Zahl in $\mathbb{N}_0$ (falls existent), für die $m + (n - m) = n$ ist.

Man muss sich zunächst überlegen, dass diese Definition *eindeutig* ist, denn es kann höchstens eine Zahl in $\mathbb{N}_0$ mit dieser Eigenschaft geben:

Man muss sich zunächst überlegen, dass diese Definition *eindeutig* ist, denn es kann höchstens eine Zahl in $\mathbb{N}_0$ mit dieser Eigenschaft geben:

Vor.: Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$.
Beh.: Es existiert höchstens eine Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ mit $m + k = n$.
(D. h. wenn sie existiert, dann aber eindeutig.)
Beweis: (durch Widerspruch)
Annahme: Seien $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ zwei verschiedene Zahlen mit dieser Eigenschaft, d.h. mit $m + k = n = m + \ell$. Aufgrund obiger Rechenregel Nr. 4 folgt daraus $k = \ell$, im Widerspruch zur Annahme. □

VK4.2:

Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen als Erweiterung von $\mathbb{N}$

Vorige Definition zeigt ein Problem mit den natürlichen Zahlen auf: "Minus" kann nicht uneingeschränkt gebildet werden; die hier beschriebene Zahl $n - m$ existiert ja nicht immer in $\mathbb{N}_0$, sondern genau dann, wenn $n \geq m$ ist.

Vorige Definition zeigt ein Problem mit den natürlichen Zahlen auf: "Minus" kann nicht uneingeschränkt gebildet werden; die hier beschriebene Zahl $n - m$ existiert ja nicht immer in $\mathbb{N}_0$, sondern genau dann, wenn $n \geq m$ ist.
Man hilft sich so aus: Wir definieren neue Zahlen hinzu: Ist $n \in \mathbb{N}$, schreiben wir das Symbol $-n$ als Abkürzung für $0 - n$ und erhalten so eine neue Menge

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Verknüpfungen "$+$" und "$\cdot$" lassen sich auf $\mathbb{Z}$ erweitern, so dass alle bisher formulierten Rechenregeln dafür richtig bleiben. Auch die Regeln für die Ordnungsrelation bleiben gültig. Man nennt $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen.

Vorige Definition zeigt ein Problem mit den natürlichen Zahlen auf: "Minus" kann nicht uneingeschränkt gebildet werden; die hier beschriebene Zahl $n - m$ existiert ja nicht immer in $\mathbb{N}_0$, sondern genau dann, wenn $n \geq m$ ist.
Man hilft sich so aus: Wir definieren neue Zahlen hinzu: Ist $n \in \mathbb{N}$, schreiben wir das Symbol $-n$ als Abkürzung für $0 - n$ und erhalten so eine neue Menge

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Verknüpfungen "$+$" und "$\cdot$" lassen sich auf $\mathbb{Z}$ erweitern, so dass alle bisher formulierten Rechenregeln dafür richtig bleiben. Auch die Regeln für die Ordnungsrelation bleiben gültig. Man nennt $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen.
Es kommt eine neue wichtige Regel in $\mathbb{Z}$ hinzu, nämlich:

6	$\forall a, b \in \mathbb{Z}\ \exists c \in \mathbb{Z}:\ a + c = b$

Mengen mit einer Verknüpfung wie $+$, nämlich derart, dass die Regeln 1,3 und 6 dafür gelten, kommen in der Mathematik sehr häufig vor. Man abstrahiert und nennt eine solche Menge mitsamt der Verknüpfung eine Gruppe. Ein ganzer Zweig der Mathematik beschäftigt sich damit, nämlich die Gruppentheorie.

Mengen mit einer Verknüpfung wie $+$, nämlich derart, dass die Regeln 1,3 und 6 dafür gelten, kommen in der Mathematik sehr häufig vor. Man abstrahiert und nennt eine solche Menge mitsamt der Verknüpfung eine Gruppe. Ein ganzer Zweig der Mathematik beschäftigt sich damit, nämlich die Gruppentheorie.

Somit ist auch "Minus" uneingeschränkt in $\mathbb{Z}$ möglich, und man sagt, "Minus" ist die Umkehrung von "$+$", da $a + (-a) = 0$ ist. Man nennt $-a$ das Inverse von a bzgl. $+$. Es gelten die dafür üblichen Rechenregeln, die Sie aus der Schule kennen ("minus mal minus gibt plus" usw.).

Ähnlich wie für "Minus", fragt man sich nun, ob auch die Multiplikation eine Umkehrung besitzt. Man definiert die Division, d. h. "geteilt durch" entsprechend:

Definition 6: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Die Zahl a/b sei diejenige Zahl in $\mathbb{Z}$ (falls existent), für die $b \cdot (a/b) = a$ ist. Auch das Zeichen $a : b$ ist gebräuchlich.

[1] d.h. nach nötigen Änderungen beim Aufschreiben *genauso*

Ähnlich wie für "Minus", fragt man sich nun, ob auch die Multiplikation eine Umkehrung besitzt. Man definiert die Division, d. h. "geteilt durch" entsprechend:

Definition 6: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Die Zahl a/b sei diejenige Zahl in $\mathbb{Z}$ (falls existent), für die $b \cdot (a/b) = a$ ist. Auch das Zeichen $a : b$ ist gebräuchlich.

Wir haben in der Definition $b \neq 0$ gefordert. Da gibt es nämlich ein Problem, wenn $b = 0$ ist: Ist $b = 0$ und $a \neq 0$, kann es keine solche Zahl geben wie in dieser Def. verlangt wird. Ist hingegen $b = 0$ und $a = 0$, haben alle (!) ganzen Zahlen die verlangte Eigenschaft. Daher ist die Definition von a/b nur sinnvoll, wenn $b \neq 0$ ist.

[1] d.h. nach nötigen Änderungen beim Aufschreiben *genauso*

Ähnlich wie für "Minus", fragt man sich nun, ob auch die Multiplikation eine Umkehrung besitzt. Man definiert die Division, d. h. "geteilt durch" entsprechend:

Definition 6: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Die Zahl a/b sei diejenige Zahl in $\mathbb{Z}$ (falls existent), für die $b \cdot (a/b) = a$ ist. Auch das Zeichen $a : b$ ist gebräuchlich.

Wir haben in der Definition $b \neq 0$ gefordert. Da gibt es nämlich ein Problem, wenn $b = 0$ ist: Ist $b = 0$ und $a \neq 0$, kann es keine solche Zahl geben wie in dieser Def. verlangt wird. Ist hingegen $b = 0$ und $a = 0$, haben alle (!) ganzen Zahlen die verlangte Eigenschaft. Daher ist die Definition von a/b nur sinnvoll, wenn $b \neq 0$ ist.

Die Zahl a/b ist dann auch eindeutig, falls sie existiert. Der Beweis dafür geht analog[1] wie bei dem für $n - m$.

[1] d.h. nach nötigen Änderungen beim Aufschreiben *genauso*

Ähnlich wie für "Minus", fragt man sich nun, ob auch die Multiplikation eine Umkehrung besitzt. Man definiert die Division, d. h. "geteilt durch" entsprechend:

Definition 6: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Die Zahl a/b sei diejenige Zahl in $\mathbb{Z}$ (falls existent), für die $b \cdot (a/b) = a$ ist. Auch das Zeichen $a : b$ ist gebräuchlich.

Wir haben in der Definition $b \neq 0$ gefordert. Da gibt es nämlich ein Problem, wenn $b = 0$ ist: Ist $b = 0$ und $a \neq 0$, kann es keine solche Zahl geben wie in dieser Def. verlangt wird. Ist hingegen $b = 0$ und $a = 0$, haben alle (!) ganzen Zahlen die verlangte Eigenschaft. Daher ist die Definition von a/b nur sinnvoll, wenn $b \neq 0$ ist.

Die Zahl a/b ist dann auch eindeutig, falls sie existiert. Der Beweis dafür geht analog[1] wie bei dem für $n - m$.

Existiert die Zahl a/b in $\mathbb{Z}$, sagen wir, dass b ein Teiler von a ist, in Zeichen: $b \mid a :\Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{Z} : a = cb$ für "b teilt a".

[1] d.h. nach nötigen Änderungen beim Aufschreiben *genauso*

VK4.3:

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen als Erweiterung von $\mathbb{Z}$

Auch bei der Division gibt es wieder das Problem, dass die Zahl a/b nicht immer in $\mathbb{Z}$ existiert; sie existiert genau dann, wenn die entsprechende Division restfrei "aufgeht", eben wenn $b \mid a$ gilt.

Auch bei der Division gibt es wieder das Problem, dass die Zahl a/b nicht immer in $\mathbb{Z}$ existiert; sie existiert genau dann, wenn die entsprechende Division restfrei "aufgeht", eben wenn $b \mid a$ gilt.

Trotzdem: Wiederum kann durch Hinzufügen neuer Elemente zum bisherigen Zahlbereich erreicht werden, dass dann die Division (nahezu) uneingeschränkt möglich ist. Aber es ist etwas schwieriger.

Auch bei der Division gibt es wieder das Problem, dass die Zahl a/b nicht immer in $\mathbb{Z}$ existiert; sie existiert genau dann, wenn die entsprechende Division restfrei "aufgeht", eben wenn $b \mid a$ gilt.

Trotzdem: Wiederum kann durch Hinzufügen neuer Elemente zum bisherigen Zahlbereich erreicht werden, dass dann die Division (nahezu) uneingeschränkt möglich ist. Aber es ist etwas schwieriger.

Man könnte dies wieder so versuchen, indem man die neuen Elemente $1/b$ nennt. Aber es müssen noch mehr dazu, etwa $2/b$, $3/b$, usw. Dann würde man also mindestens alle Elemente der Form a/b dazunehmen; allerdings kann mit dieser Darstellung keine Eindeutigkeit mehr erreicht werden, da ja $a/b = (ca)/(cb)$ für alle $c \in \mathbb{N}$ gilt (jedenfalls dann, wenn die Division a/b aufgeht; aber auch sonst sollte diese Regel richtig sein).

Der neue Zahlbereich soll ja auch wieder in erster Linie eine Menge sein, und bei der Definition einer Menge spielt es keine Rolle, ob manche Elemente mehrfach genannt werden. Man schreibt also $\frac{a}{b}$ für a/b, nennt dieses Symbol einen Bruch, a den Zähler, b den Nenner des Bruches, und definiert folgende Menge aller Brüche:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b};\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \right\}$$

Der neue Zahlbereich soll ja auch wieder in erster Linie eine Menge sein, und bei der Definition einer Menge spielt es keine Rolle, ob manche Elemente mehrfach genannt werden. Man schreibt also $\frac{a}{b}$ für a/b, nennt dieses Symbol einen Bruch, a den Zähler, b den Nenner des Bruches, und definiert folgende Menge aller Brüche:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b};\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \right\}$$

Diese Menge heißt die Menge der rationalen Zahlen. Die Gleichheit zweier Brüche ist wie folgt definiert:

Definition 7: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} :\Leftrightarrow ad = cb$

Der neue Zahlbereich soll ja auch wieder in erster Linie eine Menge sein, und bei der Definition einer Menge spielt es keine Rolle, ob manche Elemente mehrfach genannt werden. Man schreibt also $\frac{a}{b}$ für a/b, nennt dieses Symbol einen Bruch, a den Zähler, b den Nenner des Bruches, und definiert folgende Menge aller Brüche:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b};\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \right\}$$

Diese Menge heißt die Menge der rationalen Zahlen. Die Gleichheit zweier Brüche ist wie folgt definiert:

Definition 7: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} :\Leftrightarrow ad = cb$

Man erreicht dennoch eine eindeutige Darstellung für eine rationale Zahl als Bruch, wenn man zu dem entsprechenden gekürzten Bruch übergeht:

Definition 8: a und b heißen teilerfremd, falls
$\forall c \in \mathbb{N} :\ c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c = 1.$

Übung: Bilden Sie die Verneinung, d. h. schreiben Sie in Formeln auf, was "nicht teilerfremd" bedeutet.

Übung: Bilden Sie die Verneinung, d. h. schreiben Sie in Formeln auf, was "nicht teilerfremd" bedeutet.

Satz

Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gibt es ein Paar $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ so, dass $x = \frac{a}{b}$ gilt und so, dass a und b teilerfremd sind. Diese Darstellung ist eindeutig. (Man nennt diese gekürzt.)

Übung: Bilden Sie die Verneinung, d. h. schreiben Sie in Formeln auf, was "nicht teilerfremd" bedeutet.

Satz

Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gibt es ein Paar $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ so, dass $x = \frac{a}{b}$ gilt und so, dass a und b teilerfremd sind. Diese Darstellung ist eindeutig. (Man nennt diese gekürzt.)

Beweis:

Existenz: Ist $x = \frac{a}{b}$ eine rationale Zahl, so definieren wir c als die größte natürliche Zahl, die a und b teilt (die gibt es und ist eindeutig...). Dann ist $\frac{a/c}{b/c}$ ein gekürzter Bruch und gleich x.

Übung: Bilden Sie die Verneinung, d. h. schreiben Sie in Formeln auf, was "nicht teilerfremd" bedeutet.

Satz

Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gibt es ein Paar $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ so, dass $x = \frac{a}{b}$ gilt und so, dass a und b teilerfremd sind. Diese Darstellung ist eindeutig. (Man nennt diese gekürzt.)

Beweis:

Existenz: Ist $x = \frac{a}{b}$ eine rationale Zahl, so definieren wir c als die größte natürliche Zahl, die a und b teilt (die gibt es und ist eindeutig...). Dann ist $\frac{a/c}{b/c}$ ein gekürzter Bruch und gleich x.

Eindeutigkeit: Wir betrachten die Darstellung $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$ mit zwei gekürzten Brüchen und zwei je teilerfremden Paaren $(a, b), (u, v)$. Dann ist $av = bu$. Daraus folgt $v \mid b$ und $b \mid v$ wegen der Teilerfremdheitsbedingungen, also $v = b$, und analog folgt $a = u$.

Für die rationalen Zahlen gibt es nun wieder die Rechengesetze wie oben für $+$ und $\cdot$. Dabei muss jetzt aber gesagt werden, wie man "$+$" und "$\cdot$" für rationale Zahlen definiert, die insbesondere keine ganzen Zahlen sind. Das geht so:

Definition 9:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{u}{v} := \frac{au}{bv}, \quad \frac{a}{b} + \frac{u}{v} := \frac{av + ub}{bv}$$

Für die rationalen Zahlen gibt es nun wieder die Rechengesetze wie oben für $+$ und $\cdot$. Dabei muss jetzt aber gesagt werden, wie man "$+$" und "$\cdot$" für rationale Zahlen definiert, die insbesondere keine ganzen Zahlen sind. Das geht so:

Definition 9:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{u}{v} := \frac{au}{bv}, \quad \frac{a}{b} + \frac{u}{v} := \frac{av + ub}{bv}$$

Bei dieser Definition ist es egal, mit welchem Zähler und Nenner Sie die beiden rationalen Zahlen linkerseits darstellen, die hier definierte Summe bzw. das Produkt ergibt immer dasselbe Ergebnis. Man sagt dann auch, die Addition bzw. Multiplikation ist "wohldefiniert", d. h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten (also Paare aus Zähler und Nenner), mit denen Sie die rationalen Zahlen darstellen.

Für die rationalen Zahlen gibt es nun wieder die Rechengesetze wie oben für $+$ und $\cdot$. Dabei muss jetzt aber gesagt werden, wie man "$+$" und "$\cdot$" für rationale Zahlen definiert, die insbesondere keine ganzen Zahlen sind. Das geht so:

Definition 9:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{u}{v} := \frac{au}{bv}, \quad \frac{a}{b} + \frac{u}{v} := \frac{av + ub}{bv}$$

Bei dieser Definition ist es egal, mit welchem Zähler und Nenner Sie die beiden rationalen Zahlen linkerseits darstellen, die hier definierte Summe bzw. das Produkt ergibt immer dasselbe Ergebnis. Man sagt dann auch, die Addition bzw. Multiplikation ist "wohldefiniert", d. h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten (also Paare aus Zähler und Nenner), mit denen Sie die rationalen Zahlen darstellen.

Nun kommt ein neues Rechengesetz hinzu:

6'	$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, x \neq 0\ \exists\, z \in \mathbb{Q} :\ xz = y$

$\mathbb{Q}$ ist ein einfaches Beispiel für einen Körper, dies bezeichnet in der Mathematik eine Menge mit zwei Verknüpfungen, so dass alle bisher genannten Rechengesetze gelten. (Außer den Regeln für die Ordnungsrelation, die zählt man nicht zu den Körperaxiomen.)

$\mathbb{Q}$ ist ein einfaches Beispiel für einen Körper, dies bezeichnet in der Mathematik eine Menge mit zwei Verknüpfungen, so dass alle bisher genannten Rechengesetze gelten. (Außer den Regeln für die Ordnungsrelation, die zählt man nicht zu den Körperaxiomen.)
Die Menge $\{0, 1\}$ stellt mit den richtigen Definitionen für die beiden Verknüpfungen "$+$" und "$\cdot$" den kleinstmöglichen Körper dar.

$\mathbb{Q}$ ist ein einfaches Beispiel für einen Körper, dies bezeichnet in der Mathematik eine Menge mit zwei Verknüpfungen, so dass alle bisher genannten Rechengesetze gelten. (Außer den Regeln für die Ordnungsrelation, die zählt man nicht zu den Körperaxiomen.)
Die Menge $\{0, 1\}$ stellt mit den richtigen Definitionen für die beiden Verknüpfungen "+" und "$\cdot$" den kleinstmöglichen Körper dar.

Es gibt Körper mit 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11,... Elementen (hier ist für Sie wohl nicht zu sehen, wie diese Zahlenfolge gebildet wird...), aber auch Körper mit unendlich vielen Elementen, von denen Sie im Moment gar nicht ahnen, dass es sie gibt:

$\mathbb{Q}$ ist ein einfaches Beispiel für einen Körper, dies bezeichnet in der Mathematik eine Menge mit zwei Verknüpfungen, so dass alle bisher genannten Rechengesetze gelten. (Außer den Regeln für die Ordnungsrelation, die zählt man nicht zu den Körperaxiomen.)
Die Menge $\{0, 1\}$ stellt mit den richtigen Definitionen für die beiden Verknüpfungen "+" und "$\cdot$" den kleinstmöglichen Körper dar.

Es gibt Körper mit 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11,... Elementen (hier ist für Sie wohl nicht zu sehen, wie diese Zahlenfolge gebildet wird...), aber auch Körper mit unendlich vielen Elementen, von denen Sie im Moment gar nicht ahnen, dass es sie gibt:

Es gibt z. B. Körper, deren Elemente Funktionen sind. Solche werden Sie in Ihrem Studium sicher kennenlernen.

Wie kann man rationale Zahlen geeignet darstellen? Und wie kann man ihre Größe vergleichen?

Wie kann man rationale Zahlen geeignet darstellen? Und wie kann man ihre Größe vergleichen?
Bei der Bruchdarstellung kann man die Ordnungsrelation $\leq$ für rationale Zahlen wie folgt definieren und somit Größenvergleiche machen:

Definition 10:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{u}{v} :\Leftrightarrow av \leq ub$$

Wie kann man rationale Zahlen geeignet darstellen? Und wie kann man ihre Größe vergleichen?
Bei der Bruchdarstellung kann man die Ordnungsrelation $\leq$ für rationale Zahlen wie folgt definieren und somit Größenvergleiche machen:

Definition 10:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{u}{v} :\Leftrightarrow av \leq ub$$

Trotzdem ist dies im täglichen Leben nicht so praktisch, weil man dann immer rechnen muss, wenn man die Größe zweier Brüche vergleichen möchte.

Wie kann man rationale Zahlen geeignet darstellen? Und wie kann man ihre Größe vergleichen?
Bei der Bruchdarstellung kann man die Ordnungsrelation $\leq$ für rationale Zahlen wie folgt definieren und somit Größenvergleiche machen:

Definition 10:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{u}{v} :\Leftrightarrow av \leq ub$$

Trotzdem ist dies im täglichen Leben nicht so praktisch, weil man dann immer rechnen muss, wenn man die Größe zweier Brüche vergleichen möchte.

Im alten Ägypten hat man positive rationale Zahlen < 1 immer als Summe von Stammbrüchen der Form $\frac{1}{b}$, $b \in \mathbb{N}$, dargestellt. Diese ägyptische Darstellung ist tatsächlich sehr effektiv, da immer nur wenige Stammbrüche als Summanden reichen. Aber Größenvergleiche sind auch damit schwierig.

Um heutzutage Brüche schnell vergleichen zu können, stellen wir auch rationale Zahlen g-adisch dar, nämlich für $g = 10$ als sogenannte Dezimalbrüche in der Form:
$\pm a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0, b_0 b_1 b_2 \ldots$, die a_i, b_j sind hier alles Ziffern.

Um heutzutage Brüche schnell vergleichen zu können, stellen wir auch rationale Zahlen g-adisch dar, nämlich für $g = 10$ als sogenannte Dezimalbrüche in der Form:
$\pm a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0, b_0 b_1 b_2 \ldots$, die a_i, b_j sind hier alles Ziffern.

Wie man diese Ziffern durch ein Divisionsverfahren bekommt, das kennen Sie vermutlich noch aus der Schule, das will ich hier nicht nochmal aufrollen.

Um heutzutage Brüche schnell vergleichen zu können, stellen wir auch rationale Zahlen g-adisch dar, nämlich für $g = 10$ als sogenannte Dezimalbrüche in der Form:
$\pm a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0, b_0 b_1 b_2 \ldots$, die a_i, b_j sind hier alles Ziffern.

Wie man diese Ziffern durch ein Divisionsverfahren bekommt, das kennen Sie vermutlich noch aus der Schule, das will ich hier nicht nochmal aufrollen.
Man hat dann stets endlich viele Ziffern vor dem Komma, und unendlich viele Ziffern nach dem Komma. Die Ziffernfolge nach dem Komma wird aber irgendwann periodisch, d. h. ab einer Stelle wiederholt sich eine endliche Ziffernfolge immer wieder. Besteht diese sich wiederholende Ziffernfolge aus 0, d. h. kommen nur noch Nullen am Ende, sagt man auch, der Dezimalbruch ist endlich oder bricht ab.

Bei zwei rationalen Zahlen, die derart als Dezimalbruch gegeben sind, kann man dann durch Vorzeichen- und Ziffernabgleich ganz leicht bestimmen, welche Zahl die größere und welche die kleinere ist.

Bei zwei rationalen Zahlen, die derart als Dezimalbruch gegeben sind, kann man dann durch Vorzeichen- und Ziffernabgleich ganz leicht bestimmen, welche Zahl die größere und welche die kleinere ist.

Aber es gibt ein Problem mit dieser Darstellung, die vielen nicht bewusst ist: Sie ist *nicht* eindeutig, d. h. es gibt rationale Zahlen, die mehrere verschiedene Dezimaldarstellungen haben können:

Bei zwei rationalen Zahlen, die derart als Dezimalbruch gegeben sind, kann man dann durch Vorzeichen- und Ziffernabgleich ganz leicht bestimmen, welche Zahl die größere und welche die kleinere ist.

Aber es gibt ein Problem mit dieser Darstellung, die vielen nicht bewusst ist: Sie ist *nicht* eindeutig, d. h. es gibt rationale Zahlen, die mehrere verschiedene Dezimaldarstellungen haben können:

Es ist nämlich

$$0,999999999\cdots = 1,00000\ldots \qquad \text{(Beweis davon in VK6.3)}$$

und entsprechend ist auch jeder Dezimalbruch, der irgendwann nur noch Neunen als Endziffern hat, gleich demjenigen, der entsteht, wenn man die Neunen abschneidet und die dann letzte Ziffer um 1 erhöht (die Gleichung $0,9999\cdots = 1$ kann man ja mit passender 10er Potenz 10^a, $a \in \mathbb{Z}$, multiplizieren und zum abgeschnittenen Dezimalbruch dazuaddieren bzw. subtrahieren, falls dieser negativ ist).

Das ist tatsächlich aber auch die einzige Uneindeutigkeit, die bei Dezimalbrüchen vorkommen kann; damit kann man gut leben, ohne dass dies ein wirkliches Problem ist.

Das ist tatsächlich aber auch die einzige Uneindeutigkeit, die bei Dezimalbrüchen vorkommen kann; damit kann man gut leben, ohne dass dies ein wirkliches Problem ist.

Was hingegen wirklich zu einem Problem wird, ist, wenn man versucht, Gleichungen wie $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ zu lösen. Weil $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, können wir zwar wunderbar Gleichungen der Art $x + y = z$ oder $x \cdot y = z$ nach x auflösen. Bei Gleichungen wie $x^2 = 2$ geht das aber nicht so leicht; man kann sogar leicht beweisen, dass das gar nicht geht:

Satz

Die Gleichung $x^2 = 2$ *hat keine Lösung für* x *mit* $x \in \mathbb{Q}$.

Satz

Die Gleichung $x^2 = 2$ hat keine Lösung für x mit $x \in \mathbb{Q}$.

Beweis: Annahme: $x \in \mathbb{Q}$ sei eine Lösung der Gleichung. Sei etwa $x = \frac{a}{b}$ die gekürzte Darstellung mit einem $a \in \mathbb{Z}$ und einem $b \in \mathbb{N}$, die teilerfremd sind. Dann ist also

$$2 = x^2 = \frac{a^2}{b^2}, \text{ also } 2b^2 = a^2.$$

Satz

Die Gleichung $x^2 = 2$ hat keine Lösung für x mit $x \in \mathbb{Q}$.

Beweis: Annahme: $x \in \mathbb{Q}$ sei eine Lösung der Gleichung. Sei etwa $x = \frac{a}{b}$ die gekürzte Darstellung mit einem $a \in \mathbb{Z}$ und einem $b \in \mathbb{N}$, die teilerfremd sind. Dann ist also

$$2 = x^2 = \frac{a^2}{b^2}, \text{ also } 2b^2 = a^2.$$

Also ist 2 ein Teiler von a^2 und damit auch von a, also folgt $a = 2u$ für ein $u \in \mathbb{Z}$.

Satz

Die Gleichung $x^2 = 2$ hat keine Lösung für x mit $x \in \mathbb{Q}$.

Beweis: Annahme: $x \in \mathbb{Q}$ sei eine Lösung der Gleichung. Sei etwa $x = \frac{a}{b}$ die gekürzte Darstellung mit einem $a \in \mathbb{Z}$ und einem $b \in \mathbb{N}$, die teilerfremd sind. Dann ist also

$$2 = x^2 = \frac{a^2}{b^2}, \text{ also } 2b^2 = a^2.$$

Also ist 2 ein Teiler von a^2 und damit auch von a, also folgt $a = 2u$ für ein $u \in \mathbb{Z}$. Aus der Gleichheit $2b^2 = a^2$ folgt dann weiter $2b^2 = 4u^2$, also $b^2 = 2u^2$.

Satz

Die Gleichung $x^2 = 2$ hat keine Lösung für x mit $x \in \mathbb{Q}$.

Beweis: Annahme: $x \in \mathbb{Q}$ sei eine Lösung der Gleichung. Sei etwa $x = \frac{a}{b}$ die gekürzte Darstellung mit einem $a \in \mathbb{Z}$ und einem $b \in \mathbb{N}$, die teilerfremd sind. Dann ist also

$$2 = x^2 = \frac{a^2}{b^2}, \text{ also } 2b^2 = a^2.$$

Also ist 2 ein Teiler von a^2 und damit auch von a, also folgt $a = 2u$ für ein $u \in \mathbb{Z}$. Aus der Gleichheit $2b^2 = a^2$ folgt dann weiter $2b^2 = 4u^2$, also $b^2 = 2u^2$. Aber dann muss auch b durch 2 teilbar sein, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von a und b. $\lightning$ □

Na sowas: die Gleichung $x^2 = 2$ hat also keine Lösung in $\mathbb{Q}$, andererseits kann man mit rationalen Zahlen einer womöglichen Lösung beliebig nahekommen: $1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\ \ldots$

Na sowas: die Gleichung $x^2 = 2$ hat also keine Lösung in $\mathbb{Q}$, andererseits kann man mit rationalen Zahlen einer womöglichen Lösung beliebig nahekommen: $1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\ \ldots$

Offenbar müssen wir an dieser Stelle von einer "Lücke" in $\mathbb{Q}$ sprechen. Wir möchten all solche Lücken in $\mathbb{Q}$ (also $\sqrt{2}$, aber auch $\sqrt{3}$, $1/\sqrt{5}$ usw.) am liebsten gleich vollständig stopfen. Am besten so, dass man bei all möglichen Approximationen (Grenzwertbildungen) einen Grenzwert bekommen kann.

VK4.4:

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als Erweiterung von $\mathbb{Q}$

Dazu erweitert man den Zahlbereich wiederum von neuem. Es gibt nun mehrere Möglichkeiten, wie dazu in einer Analysis I-Vorlesung vorgegangen werden kann:

Dazu erweitert man den Zahlbereich wiederum von neuem. Es gibt nun mehrere Möglichkeiten, wie dazu in einer Analysis I-Vorlesung vorgegangen werden kann:

1. Man kann die Menge aller unendlichen Dezimalbrüche, auch die nichtperiodischen, als Menge reeller Zahlen $\mathbb{R}$ definieren. Dann muss man die Eigenschaft, die $\mathbb{R}$ gegenüber $\mathbb{Q}$ auszeichnet, nämlich die sogenannte Vollständigkeit, beweisen, was einigermaßen umständlich und schwierig ist.

Dazu erweitert man den Zahlbereich wiederum von neuem. Es gibt nun mehrere Möglichkeiten, wie dazu in einer Analysis I-Vorlesung vorgegangen werden kann:

1. Man kann die Menge aller unendlichen Dezimalbrüche, auch die nichtperiodischen, als Menge reeller Zahlen $\mathbb{R}$ definieren. Dann muss man die Eigenschaft, die $\mathbb{R}$ gegenüber $\mathbb{Q}$ auszeichnet, nämlich die sogenannte Vollständigkeit, beweisen, was einigermaßen umständlich und schwierig ist.

2. Man definiert die Menge der reellen Zahlen als Menge von sogenannten Dedekindschen Schnitten. Dann ist die Vollständigkeit zwar leichter zu beweisen, aber die Definition von $\mathbb{R}$ ist dann nicht mehr ganz so intuitiv wie die Definition mit den Dezimalbrüchen.

3. Man definiert die Menge der reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen. Dieser abstrakte Zugang ist dann für die meisten HörerInnen oft schwierig zu verstehen und scheint denkbar unintuitiv. Er hat aber den Vorteil, dass die Vollständigkeit aufgrund der Konstruktion quasi mitgeliefert wird, ohne dass man dazu noch groß was beweisen müsste. Außerdem wird diese Konstruktion in späteren Vorlesungen auch mit anderen Mengen gemacht ("Vervollständigung").

3. Man definiert die Menge der reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen. Dieser abstrakte Zugang ist dann für die meisten HörerInnen oft schwierig zu verstehen und scheint denkbar unintuitiv. Er hat aber den Vorteil, dass die Vollständigkeit aufgrund der Konstruktion quasi mitgeliefert wird, ohne dass man dazu noch groß was beweisen müsste. Außerdem wird diese Konstruktion in späteren Vorlesungen auch mit anderen Mengen gemacht ("Vervollständigung").

4. Man stellt sich auf den axiomatischen Standpunkt und sagt, die Menge der reellen Zahlen ist ein Körper mit Ordnungsrelation, der die Vollständigkeitseigenschaft hat. Neben den Körper- und Ordnungsaxiomen notiert man die Vollständigkeitseigenschaft als weiteres Axiom, das sogenannte Vollständigkeitsaxiom. Dann kann man alle weiteren Eigenschaften über die reellen Zahlen daraus herleiten.

Dass es die reellen Zahlen auch wirklich gibt, ist im 4. Ansatz aber noch nicht gesagt; erst die Konstruktion (wie etwa über Dezimalbrüche, Dedekind-Schnitte oder Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen) zeigt dies: Man muss nachweisen, dass die konstruierten Zahlen alle $\mathbb{R}$-Axiome erfüllen, womit eigentlich keine Arbeit im Vergleich zu den anderen Zugängen gespart wurde. Viele Dozenten sparen sich diese Arbeit dann meistens trotzdem aus Zeitgründen.

Dass es die reellen Zahlen auch wirklich gibt, ist im 4. Ansatz aber noch nicht gesagt; erst die Konstruktion (wie etwa über Dezimalbrüche, Dedekind-Schnitte oder Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen) zeigt dies: Man muss nachweisen, dass die konstruierten Zahlen alle $\mathbb{R}$-Axiome erfüllen, womit eigentlich keine Arbeit im Vergleich zu den anderen Zugängen gespart wurde. Viele Dozenten sparen sich diese Arbeit dann meistens trotzdem aus Zeitgründen.

Die erwähnte Vollständigkeitseigenschaft bzw. das Vollständigkeitsaxiom besagt nun:

Satz

(Vollständigkeitsaxiom) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke $z \in \mathbb{R}$, d. h. diese liegt in $\mathbb{R}$.

Um zu verstehen, was das heißt, müssen wir erstmal die hier vorkommenden Begriffe erklären:

Definition 11: Eine Teilmenge M einer Menge K, die eine Ordnungsrelation $\leq$ besitzt, heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $y \in K$ gibt mit

$$\forall\, x \in M : \; x \leq y.$$

Eine solche Zahl y heißt dann obere Schranke von M.

Um zu verstehen, was das heißt, müssen wir erstmal die hier vorkommenden Begriffe erklären:

Definition 11: Eine Teilmenge M einer Menge K, die eine Ordnungsrelation $\leq$ besitzt, heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $y \in K$ gibt mit

$$\forall\, x \in M : \; x \leq y.$$

Eine solche Zahl y heißt dann obere Schranke von M.

Mit anderen Worten: Es existiert eine obere Schranke y für alle Elemente von M.

Um zu verstehen, was das heißt, müssen wir erstmal die hier vorkommenden Begriffe erklären:

Definition 11: Eine Teilmenge M einer Menge K, die eine Ordnungsrelation $\leq$ besitzt, heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $y \in K$ gibt mit

$$\forall\, x \in M : \; x \leq y.$$

Eine solche Zahl y heißt dann obere Schranke von M.

Mit anderen Worten: Es existiert eine obere Schranke y für alle Elemente von M.

Die kleinste obere Schranke von M ist eine obere Schranke z von M, die durch die Eigenschaft

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, x \in M : z - \varepsilon < x$$

gekennzeichnet ist: Es wird ausgedrückt, dass es keine kleinere obere Schranke als z gibt.

Das Axiom besagt also, dass so ein z eine reelle Zahl ist. Sie ist dann auch eindeutig bestimmt; man nennt sie Supremum von M. (Bemerkung: Verwechseln Sie das Supremum von M nicht mit dem Maximum von M, das das größte Element in M bezeichnet. Man definiert $x = \max M :\Leftrightarrow x \in M \wedge (\forall y \in M : x \leq y \Rightarrow x = y)$.)

Das Axiom besagt also, dass so ein z eine reelle Zahl ist. Sie ist dann auch eindeutig bestimmt; man nennt sie Supremum von M. (Bemerkung: Verwechseln Sie das Supremum von M nicht mit dem Maximum von M, das das größte Element in M bezeichnet. Man definiert $x = \max M :\Leftrightarrow x \in M \wedge (\forall y \in M : x \leq y \Rightarrow x = y)$.)

Inwiefern löst diese Vollständigkeitseigenschaft nun unser Ausgangsproblem $x^2 = 2$?

Das Axiom besagt also, dass so ein z eine reelle Zahl ist. Sie ist dann auch eindeutig bestimmt; man nennt sie Supremum von M. (Bemerkung: Verwechseln Sie das Supremum von M nicht mit dem Maximum von M, das das größte Element in M bezeichnet. Man definiert $x = \max M :\Leftrightarrow x \in M \wedge (\forall y \in M : x \leq y \Rightarrow x = y)$.)

Inwiefern löst diese Vollständigkeitseigenschaft nun unser Ausgangsproblem $x^2 = 2$?

Nun, betrachtet man die (etwa durch $y = 2$ nach oben beschränkte) Menge $M = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 2\}$, so hat laut Axiom diese Menge eine kleinste obere Schranke in $\mathbb{R}$ (aber nicht in M!), nennen wir diese z. (Wir identifizieren z dann mit dem unendlichen Dezimalbruch $1,4142\ldots$.)

Das Axiom besagt also, dass so ein z eine reelle Zahl ist. Sie ist dann auch eindeutig bestimmt; man nennt sie Supremum von M. (Bemerkung: Verwechseln Sie das Supremum von M nicht mit dem Maximum von M, das das größte Element in M bezeichnet. Man definiert $x = \max M :\Leftrightarrow x \in M \wedge (\forall y \in M : x \leq y \Rightarrow x = y)$.)

Inwiefern löst diese Vollständigkeitseigenschaft nun unser Ausgangsproblem $x^2 = 2$?

Nun, betrachtet man die (etwa durch $y = 2$ nach oben beschränkte) Menge $M = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 2\}$, so hat laut Axiom diese Menge eine kleinste obere Schranke in $\mathbb{R}$ (aber nicht in M!), nennen wir diese z. (Wir identifizieren z dann mit dem unendlichen Dezimalbruch $1,4142\ldots$.)

Die reelle Zahl z ist nun gleich der positiven Lösung von $x^2 = 2$, die wir mit dem Symbol $\sqrt{2}$ bezeichnen. (Ein Wurzelsymbol bezeichnet immer eine nichtnegative Lösung der entsprechenden Gleichung.)

Beweis: Aus der Supremumseigenschaft von z, nämlich

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in M : z - \varepsilon < x$$

folgt (herleitbar aus den Rechenregeln für die Ordnungsrelation):

Beweis: Aus der Supremumseigenschaft von z, nämlich

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in M : z - \varepsilon < x$$

folgt (herleitbar aus den Rechenregeln für die Ordnungsrelation):

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in M : \underbrace{(z-\varepsilon)^2}_{=z^2-2z\varepsilon+\varepsilon^2} < x^2.$$

Beweis: Aus der Supremumseigenschaft von z, nämlich

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in M : z - \varepsilon < x$$

folgt (herleitbar aus den Rechenregeln für die Ordnungsrelation):

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in M : \underbrace{(z-\varepsilon)^2}_{=z^2-2z\varepsilon+\varepsilon^2} < x^2.$$

Mit $\varepsilon > 0$ durchläuft auch $2z\varepsilon - \varepsilon^2$ alle nicht zu großen positiven reellen Zahlen δ. Es folgt:

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in M : z^2 - \delta < x^2,$$

Beweis: Aus der Supremumseigenschaft von z, nämlich

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in M : z - \varepsilon < x$$

folgt (herleitbar aus den Rechenregeln für die Ordnungsrelation):

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in M : \underbrace{(z-\varepsilon)^2}_{=z^2-2z\varepsilon+\varepsilon^2} < x^2.$$

Mit $\varepsilon > 0$ durchläuft auch $2z\varepsilon - \varepsilon^2$ alle nicht zu großen positiven reellen Zahlen δ. Es folgt:

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in M : z^2 - \delta < x^2,$$

d. h. die Menge $\{x^2 \in \mathbb{R};\ x \in M\}$ hat also die kleinste obere Schranke z^2, andererseits ist die kleinste obere Schranke dieser Menge offensichtlich $= 2$, so dass $z^2 = 2$ folgt. □

Die Vollständigkeitseigenschaft ist nun die Grundlage, warum die ganze Analysis, die sich jetzt als Theorie der Grenzwertbildungen entpuppt, überhaupt in $\mathbb{R}$ funktioniert: Erst die Vollständigkeit macht es möglich, darin mit Grenzwerten zu arbeiten. Und will man sonst mit Grenzwerten arbeiten, geht man eben zur Vervollständigung über. Äquivalent zur Vollständigkeitseigenschaft ist übrigens die Aussage "Alle Cauchyfolgen haben einen Grenzwert in $\mathbb{R}$".

Die Vollständigkeitseigenschaft ist nun die Grundlage, warum die ganze Analysis, die sich jetzt als Theorie der Grenzwertbildungen entpuppt, überhaupt in $\mathbb{R}$ funktioniert: Erst die Vollständigkeit macht es möglich, darin mit Grenzwerten zu arbeiten. Und will man sonst mit Grenzwerten arbeiten, geht man eben zur Vervollständigung über. Äquivalent zur Vollständigkeitseigenschaft ist übrigens die Aussage "Alle Cauchyfolgen haben einen Grenzwert in $\mathbb{R}$".

Können wir dann alle möglichen Gleichungen lösen?

Die Vollständigkeitseigenschaft ist nun die Grundlage, warum die ganze Analysis, die sich jetzt als Theorie der Grenzwertbildungen entpuppt, überhaupt in $\mathbb{R}$ funktioniert: Erst die Vollständigkeit macht es möglich, darin mit Grenzwerten zu arbeiten. Und will man sonst mit Grenzwerten arbeiten, geht man eben zur Vervollständigung über. Äquivalent zur Vollständigkeitseigenschaft ist übrigens die Aussage "Alle Cauchyfolgen haben einen Grenzwert in $\mathbb{R}$".

Können wir dann alle möglichen Gleichungen lösen?

Antwort: Nein, Gleichungen wie $x^2 = -1$ können in $\mathbb{R}$ nicht gelöst werden. Denn wegen der Ordnungsrelationsrechenregel Nr. 3 unten ist $x^2 = x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wiederum kann der Zahlbereich $\mathbb{R}$ erweitert werden, um dieses Problem in den Griff zu bekommen. Das machen wir aber erst später in Kapitel VK7.2, wenn wir $\mathbb{R}$ etwas mehr untersucht haben.

Ist $\mathbb{R}$ die kleinstmögliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$?

Ist $\mathbb{R}$ die kleinstmögliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$?

Antwort: Nein, wenn Sie das Vollständigkeitsaxiom ignorieren und stattdessen Lösungen von einzelnen Gleichungen wie $x^2 = 2$ zu $\mathbb{Q}$ geeignet hinzunehmen, lassen sich unendlich viele Zwischenkörper zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ konstruieren. Das lernt man später in Algebra.