SFB 656 MoBil

COLLABORATIVE RESEARCH CENTRE 656 MOLECULAR CARDIOVASCULAR IMAGING

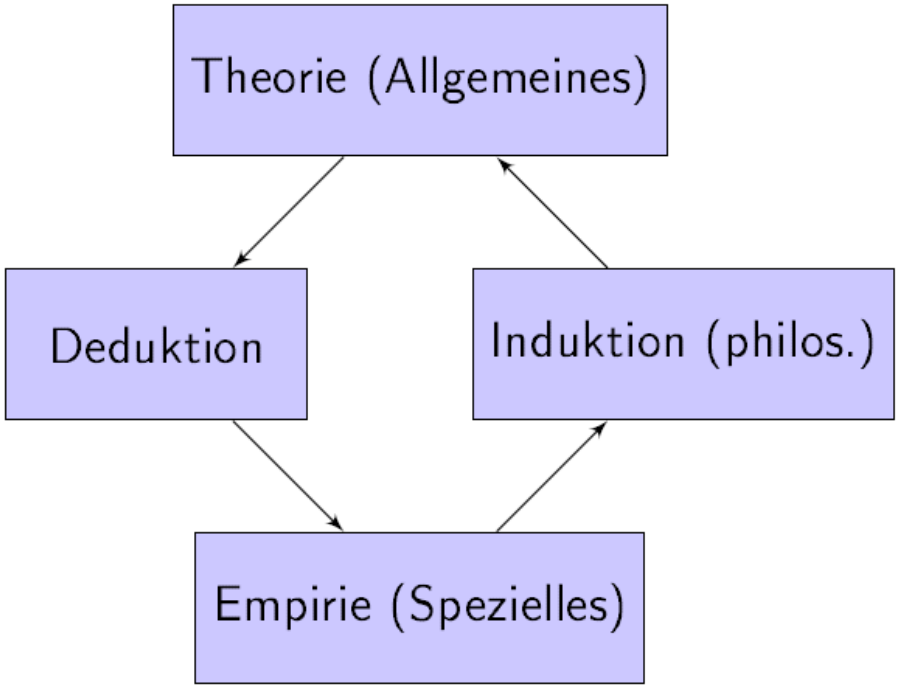
Vorkurs Mathematik 2016

WWU Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik

PD Dr. K. Halupczok / Dr. Frank Wübbeling

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Denkanstoß:
Was ist wissenschaftliches Denken?



SFB 656 MoBil
COLLABORATIVE RESEARCH CENTRE 656 MOLECULAR CARDIOVASCULAR IMAGING
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Denkanstoß:
Was ist wissenschaftliches Denken?

- Theorie: Entwirft ein Bild eines Ausschnitts der Wirklichkeit, um diesen Teil der Wirklichkeit zu erklären.
- Empirie: Die Sammlung/Erhebung von Informationen/Daten der Wirklichkeit, die beobachtet werden können in gezielten, systematischen Untersuchungen.
- Deduktion: Schluss vom Allgemeinen auf das Besondere, d. h. Schlussfolgerung von gegebenen Prämissen auf logisch zwingende Konsequenzen, inklusive der formalen Ableitung von Ergebnissen (bzw. Herleitung) aus einer Theorie.
- Induktion (philosophisch): Gewinnung von allgemeinen Erkenntnissen aus speziellen.

SFB 656 MoBil
COLLABORATIVE RESEARCH CENTRE 656 MOLECULAR CARDIOVASCULAR IMAGING

Was ist Mathematik?

SFB 656 MoBil

- Mathematik ist eine Wissenschaft, die durch logische Definitionen selbstgeschaffene abstrakte Strukturen mittels der Logik auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht. (Wikipedia)
- Seit dem 19. Jahrhundert bemüht man sich, die Mathematik und ihre Teilgebiete durch einen streng logischen strukturellen Aufbau zu erfassen.
- Man beginnt dabei mit einigen wenigen grundlegenden widerspruchsfreien Aussagen, welche als wahr angesehen werden, den Axiomen.
- Auf diesen Grundlagen werden mit Hilfe der mathematischen Formelsprache in Definitionen neue Gebilde eingeführt.
- Man leitet daraus durch logische Schlussfolgerungen weitere wahre Aussagen her: Den Satz, Theorem, Lemma.
- Die lückenlose und korrekte Herleitung eines Satzes ist ein Beweis.
- Die Sätze werden spezialisiert in Beispielen.

COLLABORATIVERESEARCHCENTRE656MOLECULARCARDIOVASCULARIMAGING

Definition, Satz, Beweis, Beispiel

gilt. Hier ist $\alpha : \mathbb{R}^+ \times Y \to (0, \alpha_0)$ *so gewählt, dass*

$$\limsup_{\delta \to 0} \left\{ \alpha(\delta, y^\delta) \mid y^\delta \in Y, \|y^\delta - y\| \leq 0 \right\} = 0 \tag{3.2}$$

gilt. Für ein gegebenes $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ *nennt man ein Paar* (R_α, α) *eine (konvergente) Regularisierungsmethode (zur Lösung von* $Tx = y$*), falls* (3.1) *und* (3.2) *erfüllt sind.*

Definition 3.0.9. *Für die Parameterwahl unterscheiden wir zwei Fälle:*

- *Hängt* α *nicht von* y^δ *ab (also* $\alpha = \alpha(\delta)$*), so heißt* α *a-priori Parameterwahl.*
- *Andernfalls heißt* α *a-posteriori Parameterwahl*

Theorem 3.0.10. *Sei* $T : X \to Y$ *ein beschränkter Operator und sei* $\{R_\alpha\}_\alpha$ *eine konvergente Regularisierung für* $T^\dagger$ *mit einer Parameterwahl* α*, die nur von* y^δ *und nicht von* δ *selbst abhängt. Dann ist* $T^\dagger$ *beschränkt und kann auf einen steigen Operator von* X *nach* Y *erweitert werden.*

Beweis. Sei $\alpha = \alpha(y^\delta)$. Nach Definition gilt dann

$$\limsup_{\delta \to 0} \left\{ \|R_{\alpha(y^\delta)} y^\delta - T^\dagger y\| \mid y^\delta \in \mathcal{Y}, \|y^\delta - y\| \leq 0 \right\} = 0$$

und daher insbesondere $R_{\alpha(y)} y = T^\dagger y$ für alle $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$. Weiter gilt für jede Folge $(y_n) \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ mit Grenzwert y

$$T^\dagger y_n = R_{\alpha(y_n)} y \to R_{\alpha(y)} y = T^\dagger y.$$

Daraus folgt, dass $T^\dagger$ stetig ist auf $\mathcal{D}(T^\dagger)$. Da $\mathcal{D}(T^\dagger)$ Dicht ist in Y existiert eine eindeutige, stetige Erweiterung von $T^\dagger$ auf ganz Y. □

Bemerkung 3.0.11.

1. *Es gibt keine fehlerfreien (error-free) Regularisierungsmethoden. (In der Praxis ist es trotzdem oft sinnvoll, die "Struktur" der Daten zu berücksichtigen, wenn man sich stets bewusst ist, dass das Verfahren für* $\delta \to 0$ *nicht konvergiert.).*
2. *Es stellen sich folgende Fragen:*
   - *Wie kann man Regularisierungsoperatoren konstruieren?*
   - *Wie erhält man eine Parameterwahl, so dass die zugehörigen Regularisierungen konvergieren?*
   - *Wie kann man dies "optimal" tun?*

SFB 656 MoBil
COLLABORATIVE RESEARCH CENTRE 656 MOLECULAR CARDIOVASCULAR IMAGING

Axiomatische Grundlage der Mathematik

SFB 656 MoBil

Wie Aussagen aus einem begrenzten Vorrat von Definitionen, Postulaten und Axiomen hergeleitet und bewiesen werden, zeigte zuerst Euklid um das 3. Jh. v. Chr. mit seinen Elementen.

1. Durch zwei Punkte geht genau eine Linie.
2. Eine Strecke kann zu einer Geraden verlängert werden.
3. Durch jeden Punkt geht genau ein Kreis mit vorgegebenem Radius.
4. Alle rechten Winkel sind gleich.
5. Durch jeden Punkt geht genau eine Parallele zu einer vorgegebenen Geraden.

COLLABORATIVERESEARCHCENTRE656MOLECULARCARDIOVASCULARIMAGING

Euklids Definitionen

- Ein Punkt ist etwas, was keinen Teil hat.
- Eine Linie ist eine breitenlose Länge.

Fragwürdig!

SFB 656 MoBil

COLLABORATIVERESEARCHCENTRE656MOLECULARCARDIOVASCULARIMAGING

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Hilberts Idee

SFB 656 MoBil

Axiomensysteme sollten sein…

- Widerspruchsfrei
  Beweis durch Beispiel
- Unabhängig
  Kein Axiom A kann weggelassen werden. Beweis durch Angabe eines Beispiels, bei dem alle Axiome außer A gelten, aber A nicht.
- Vollständig
  Keine Axiome können hinzugefügt werden.
- Kategorisch
  Alle Beispiele sind isomorph (von gleicher Struktur)

COLLABORATIVERESEARCHCENTRE656MOLECULARCARDIOVASCULARIMAGING

Axiomatische Grundlage der Mathematik

SFB 656 MoBil

Den Versuch, die axiomatische Absicherung der Erkenntnisse der Mathematik unter einheitlichen strukturellen Gesichtspunkten aufzubauen, wurde seit 1939 von einem französischen Mathematikerteam unter dem Pseudonym Nicolas Bourbaki unternommen. Der streng logische Stil Bourbakis hat die heutige Mathematik entscheidend mitgeprägt.

COLLABORATIVERESEARCHCENTRE656MOLECULARCARDIOVASCULARIMAGING

Grenzen der Axiomatik

Der axiomatischen Herangehensweise sind Grenzen gesetzt: Der Logiker Kurt Gödel bewies um 1930 den Gödelschen Unvollständigkeitssatz:

In jedem mathematischen Axiomensystem existieren entweder wahre, jedoch nicht beweisbare Aussagen, oder aber das System ist widersprüchlich.

SFB 656 MoBil
COLLABORATIVE RESEARCH CENTRE 656 MOLECULAR CARDIOVASCULAR IMAGING

Teilgebiete der Mathematik

SFB 656 MoBil

- Theoretische (oder Reine) Mathematik, wie im Anfangsstudium
  - Analysis
    - Funktionen, Funktionentheorie, Funktionalanalysis
    - Reelle und komplexe Zahlen
    - Differentialrechnung
  - Algebra
    - Strukturuntersuchung
    - Lineare Algebra, Zahlentheorie, algebraische Geometrie
    - Vektorräume, Gruppen, Ringe, Körper
- Angewandte Mathematik
  - Anwendung von Methoden der theoretischen Mathematik auf die Wirklichkeit
  - Probleme aus der realen Welt benötigen eine theoretische Lösung, die von der klassischen Mathematik nicht abgedeckt wird.

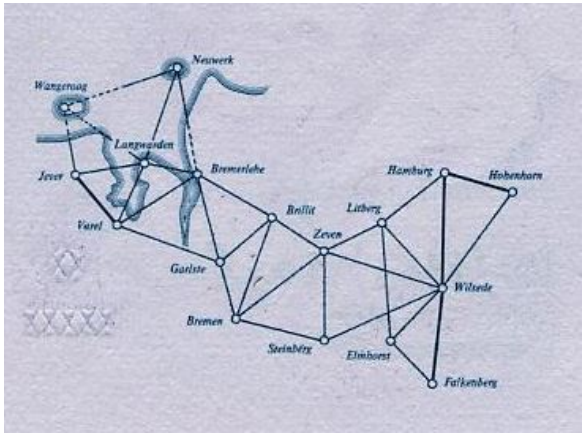
COLLABORATIVERESEARCHCENTRE656MOLECULARCARDIOVASCULARIMAGING

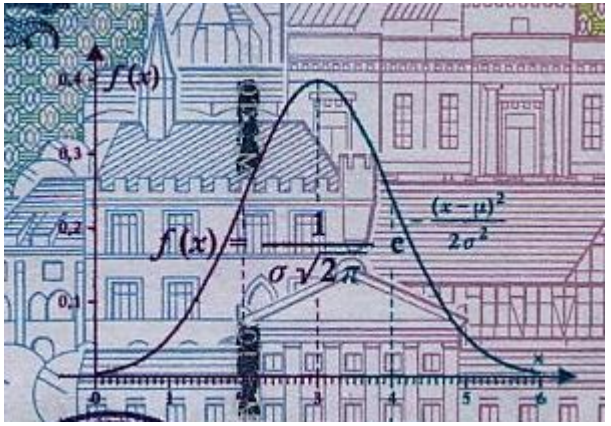
Von Neumann

- Reiner Mathematiker (Logik und Funktionentheorie)
- Quantenmechanik führt zu ungelösten Problemen der Funktionalanalysis.
- Begründer der Spieltheorie, heute eine der Grundlagen der WiWi, acht Nobelpreise der WiWi
- Beschrieb mit der von Neumann-Rechnerarchitektur den Prototyp der heutigen Rechner.

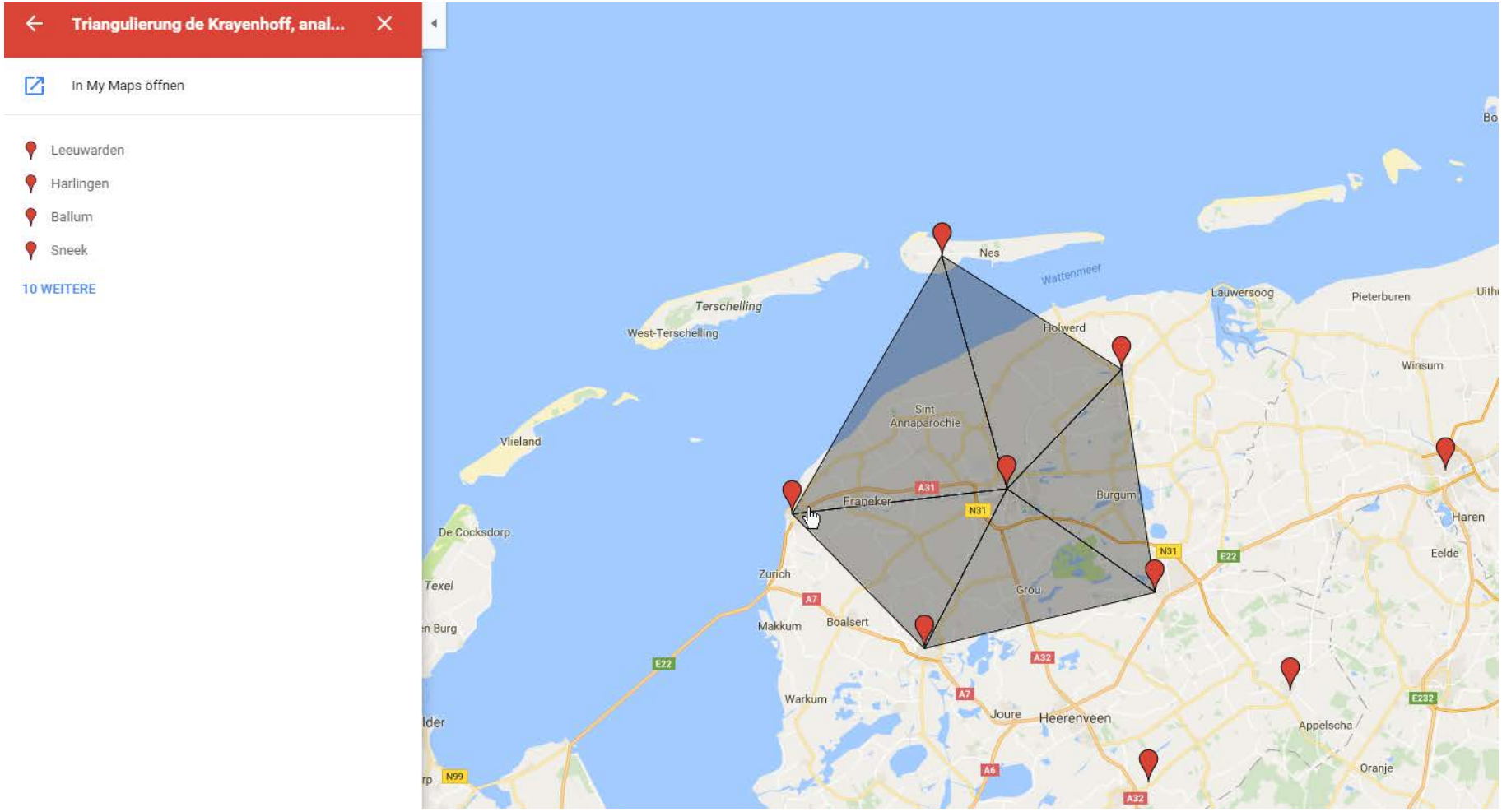
SFB 656 MoBil
COLLABORATIVERESEARCHCENTRE656MOLECULARCARDIOVASCULARIMAGING

Gauss
Methode der kleinsten Quadrate





Gauss
Methode der kleinsten Quadrate



COLLABORATIVE RESEARCH CENTRE 656 MOLECULAR CARDIOVASCULAR IMAGING

Gauss: Kleinste Quadrate

Triangle 121.

0.	Harlingen	50° 58′ 15.238″
1.	Leeuwarden	82° 47′ 15.351″
2.	Ballum	46° 14′ 27.202″

Triangulum 127.

15.	Leeuwarden	59° 24′ 0.645″
16.	Dockum	76° 34′ 9.021″
17.	Ballum	44° 1′ 51.040″

SFB 656 MoBil
COLLABORATIVERESEARCHCENTRE656MOLECULARCARDIOVASCULARIMAGING

Gauss: Kleinste Quadrate

Excessus sphaeroidicos novem triangulorum invenimus deinceps: 1.749″,1.147″, 1.243″, 1.698″, 0.873″, 1.167″, 1.104″, 2.161″, 1.403″. Oritur itaque aequatio conditionalis secundi generis prima haec:*) $v^{(0)} + v^{(1)} + v^{(2)} - 180° 0' 1.749'' = 0$, et perinde reliquae: hinc habemus novem aequationes sequentes:

SFB 656 MoBil
COLLABORATIVERESEARCHCENTRE656MOLECULARCARDIOVASCULARIMAGING

Formeln – früher und heute

accipiendo ω in eadem significatione ut in art. praec. Et quum $\Omega - M$, indefinite, sit functio homogenea secundi ordinis indeterminatarum ξ, η, ζ, etc., sponte patet, eius valorem pro $\xi = \theta f$, $\eta = \theta g$, $\zeta = \theta h$, etc. fieri $= \theta\theta\omega$, et proin valorem minimum, quem Ω pro $t = K - \kappa$ obtinere potest, fieri $= M + \theta\theta\omega = M + \frac{\kappa\kappa}{\omega}$. Vice versa, si Ω debet valorem aliquem praescriptum $M + \mu\mu$ non superare, valor ipsius t necessario inter limites $K - \mu\sqrt{\omega}$ et $K + \mu\sqrt{\omega}$ contentus esse debet, ubi $\mu\sqrt{\omega}$ aequalis fit errori medio in determinatione maxime plausibili ipsius t metuendo, si pro μ accipitur error medius observationum, quibus pondus $= 1$ tribuitur.

where $\mathbf{I}^{1-n}$ acts on a function in $\mathbb{R}^1$. Since for $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^1)$

$$(\mathbf{I}^{1-n}h)\hat{}(\sigma) = |\sigma|^{n-1}\hat{h}(\sigma)$$
$$= (\operatorname{sgn}(\sigma))^{n-1}\sigma^{n-1}\hat{h}(\sigma)$$

and since the Hilbert transform $\mathbf{H}$ can be defined by

$$(\mathbf{H}h)\hat{}(\sigma) = -i\operatorname{sgn}(\sigma)\hat{h}(\sigma),$$

see (VII.1.11), we can write

$$\mathbf{I}^{1-n}h = \mathbf{H}^{n-1}h^{(n-1)},$$

hence

$$f = \tfrac{1}{2}(2\pi)^{1-n}\mathbf{R}^{\#}\,\mathbf{H}^{n-1}g^{(n-1)} \tag{2.4}$$

where the $(n-1)$st derivative is taken with respect to the second argument. Using

$$\mathbf{H}^{n-1} = \begin{cases} (-1)^{(n-2)/2}\mathbf{H}, & n \text{ even}, \\ (-1)^{(n-1)/2}, & n \text{ odd} \end{cases}$$

and the explicit form of $\mathbf{R}^{\#}$ from Section II.1, (2.4) can be written as

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}\begin{cases} (-1)^{(n-2)/2}\int_{S^{n-1}}\mathbf{H}g^{(n-1)}(\theta, x\cdot\theta)\,\mathrm{d}\theta, & n \text{ even}, \\ (-1)^{(n-1)/2}\int_{S^{n-1}}g^{(n-1)}(\theta, x\cdot\theta)\,\mathrm{d}\theta, & n \text{ odd}. \end{cases} \tag{2.5}$$

SFB 656 MoBil
COLLABORATIVE RESEARCH CENTRE 656 MOLECULAR CARDIOVASCULAR IMAGING

Formelsprache der Mathematik

SFB 656 MoBil

Die Formelsprache der Mathematik ist extrem kompakt.

Mathematische Aussagen können rein in der Formelsprache ausgedrückt werden oder auch nur sprachlich, wobei rein sprachliche Versionen oft Ungenauigkeiten beinhalten, die in der Formelsprache meist ausgeschlossen sind. Zudem überwindet die Formelsprache die Sprachbarriere.

Beispiel:

$$\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \frac{n}{n^2 + 2} \leq C$$

Es gibt eine positive reelle Zahl C, so dass der Bruch n geteilt durch n^2+2 kleiner gleich C ist für alle natürlichen Zahlen n.

COLLABORATIVERESEARCHCENTRE656MOLECULARCARDIOVASCULARIMAGING

Definitionen

Für die Entwicklung mathematischer Theorien sind Definitionen wichtig, bei der neue mathematische Begriffe oder Abkürzungen auf vorherige zurückgeführt und präzisiert werden.

Definition: Eine gerade natürliche Zahl ist eine natürliche Zahl, die durch 2 teilbar ist.
Diese Definition geht auf die Definitionen einer natürlichen Zahl, der Zahl 2 und die Teilbarkeit zurück.
In knapper Formelsprache kann man diese Definition z. B. so aufschreiben:

$$n \in \mathbb{N}\ gerade :\Leftrightarrow 2 \mid n$$

Seien $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0.\ a|b :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z}: ac = b.$

SFB 656 MoBil
COLLABORATIVE RESEARCH CENTRE 656 MOLECULAR CARDIOVASCULAR IMAGING

Das griechische Alphabet

$A\ \alpha$ alpha	$I\ \iota$ iota	$P\ \rho,\varrho$ rho
$B\ \beta$ beta	$K\ \kappa,\varkappa$ kappa	$\Sigma\ \sigma,\varsigma$ sigma
$\Gamma\ \gamma$ gamma	$\Lambda\ \lambda$ lambda	$T\ \tau$ tau
$\Delta\ \delta$ delta	$M\ \mu$ mü	$\Upsilon, Y\ \upsilon$ ypsilon
$E\ \epsilon,\varepsilon$ epsilon	$N\ \nu$ nü	$\Phi\ \phi,\varphi$ phi
$Z\ \zeta$ zeta	$\Xi\ \xi$ xi	$X\ \chi$ chi
$H\ \eta$ eta	$O\ o$ omikron	$\Psi\ \psi$ psi
$\Theta\ \theta,\vartheta$ theta	$\Pi\ \pi,\varpi$ pi	$\Omega\ \omega$ omega

SFB 656 MoBil

COLLABORATIVE RESEARCH CENTRE 656 MOLECULAR CARDIOVASCULAR IMAGING

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Plan und Ziele für den Vorkurs 2016

SFB 656 MoBil

- Wir werden in unserem Vorkurs auf das Studium in Mathematik vorbereiten. Dazu gehört, dass wir uns mit der Grundlage der Mathematik, der Aussagenlogik befassen und dabei die (Formel-) Sprache, in der Mathematik formuliert wird, kennenlernen.
- Die Erlernung von mathematischem Schlussfolgern und Beweisprinzipien, was im Studium täglich benötigt und angewandt wird, soll dabei im Vordergrund stehen.
- Wir geben auch Tipps für die spätere Praxis des logischen Denkens im Studium.
- Zudem werden wir nebenher an einiges aus dem Schulstoff erinnern bzw. uns einen ersten wissenschaftlichen Blick auf die Mathematik erarbeiten.

COLLABORATIVERESEARCHCENTRE656MOLECULARCARDIOVASCULARIMAGING

Überblick über den Inhalt des Vorkurses:

- VK1: Logik - Die Kunst des Schlussfolgerns
- VK2: Mathematische Beweise
- VK3: Elementare Mengenlehre
- VK4: Zahlen und Zahlbereiche, vollständige Induktion
- VK5: Elementare reelle Arithmetik, Ungleichungen und Intervalle
- VK6: Funktionen, Folgen und Grenzwerte
- VK7: Komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen
- VK8: Zum Selbststudium: Ausblick in den Stoff der
  - Analysis: Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integration
  - Lineare Algebra: Vektoren, Dimension, Matrizen

COLLABORATIVERESEARCHCENTRE656MOLECULARCARDIOVASCULARIMAGING