Vorkurs Mathematik 2016
VK1: Logik-Die Kunst des Schlussfolgerns

WWU Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik

PD Dr. K. Halupczok / Dr. Frank Wübbeling

SFB 656
MoBil

COLLABORATIVERESEARCHCENTRE656MOLECULARCARDIOVASCULARIMAGING

Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Aussagenlogik

SFB 656 MoBil

Definition 1: Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das wahr oder falsch sein kann.

Beispiel 2: Aussagen sind etwa: Es regnet. 3 ist eine gerade Zahl. Es gibt keine Kängurus in Münster. Mathematik ist schwer zu erlernen. In Münster regnet es oder die Kirchenglocken läuten, und wenn beides gleichzeitig passiert, dann ist Sonntag.

Der Wahrheitsgehalt von Sätzen der Umgangssprache ist nicht immer leicht zu bestimmen, wie an diesen Beispielen zu sehen ist. Es gibt außerdem auch Aussagen, deren Wahrheitsgehalt unbekannt ist, wie etwa die folgende:

Beispiel 3: Jede natürliche gerade Zahl, die größer oder gleich 4 ist, ist Summe zweier Primzahlen. (Goldbachsche Vermutung seit 1742)

Unscharfe Logik

Bei der Bewertung von Aussagen über die Wirklichkeit möchte man gern eine Wahrscheinlichkeit des Wahrheitsgehalts einbringen, man möchte die Aussagen unscharf („fuzzy“) bewerten.

Die Theorie dieser Aussagen spielt bei der Anlagensteuerung (Regelungstechnik), in der künstlichen Intelligenz usw. eine große Rolle.

Wir betrachten diese Logik hier nicht.

Aussagenlogik

SFB 656 MoBil

Gern gibt man bei Aussagen an, wer und wann die Gültigkeit nachgewiesen hat:

Beispiel 4: Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ hat für n ≥ 3 keine Lösungstripel im Bereich der natürlichen Zahlen. (Fermatsche Vermutung seit 1637, bewiesen seit 1993 durch A. Wiles und R. Taylor, veröffentlicht 1995, heute: "Satz von Fermat und Wiles")

Die letzte Aussage in Bsp. 2 zeigt, dass Aussagen mit "und", "oder" verknüpft werden können, um neue Aussagen zu erhalten. Durch Verneinung können ebenfalls neue Aussagen gebildet werden.

Offenbar gibt es dafür einige Bildungsgesetze, die universell sind. Diese Grundgesetze des Schlussfolgerns möchten wir uns heute erarbeiten.

Axiomatik

SFB 656
MoBil

Um in der Mathematik mit ihren Aussagen und den zugehörigen Wahrheitsgehalten vernünftig arbeiten zu können, liegt es nahe, einige ***wenige*** Aussagen als kleinste wahre Grundbausteine anzunehmen (das sind dann die Prämissen bzw. die Axiome), und zu versuchen, alle weiteren daraus abzuleiten, wofür dann die „Regeln der Logik“ verwendet werden.

Damit ist es dann einigermaßen leicht zu bestimmen, ob etwas wahr oder falsch ist, im Gegensatz zu Sätzen der Umgangssprache, deren Wahrheitsgehalt von allerlei weiteren Gegebenheiten (aktuelles Wetter, subjektive Meinung...) abhängen kann.

Also: Wir brauchen eine Formulierung der logischen Regeln.

Abstraktion

Mathematik versucht, Definitionen und Sätze möglichst abstrakt zu halten und so lange wie möglich keine konkreten Modelle zu nutzen.

Die Definition der Stetigkeit ist gültig für alle Funktionen auf Mengen, in denen eine Subtraktion und ein Betrag definiert sind.

Die Definition der Primeigenschaft ist gültig für alle Elemente von Mengen, für die eine Teilereigenschaft und eine Multiplikation definiert sind.

Abstraktion

SFB 656 MoBil

Mathematik untersucht abstrakte Strukturen an sich auf ihre Eigenschaften und Muster. Viele Eigenschaften von Gebilden wiederholen sich, Sätze, die aus diesen Eigenschaften abgeleitet werden, sind trotzdem nur einmal zu beweisen.

Es ist sinnvoll, gemeinsame Eigenschaften mit Namen zu versehen (mittels Definitionen), und Eigenschaften abzuleiten, die dann all diesen Gebilden gemeinsam sind.

Etwa: Mengen, auf denen eine Addition und eine skalare Multiplikation mit gewissen Eigenschaften definiert sind, nennen wir einen Vektorraum. Beispiele dafür sind total unterschiedlich: der euklidische Raum, aber auch die Funktionenräume. Unterschiedliche Modelle gleicher Struktur heißen isomorph.

Hilbert: Ich stelle mir statt Punkt, Gerade und Ebene immer Bierdeckel, Bierglas und Bierfass vor.

Für die Informatiker: Das ist die objektorientierte Sichtweise. (C++: class vector)

Deduktion: Verstehen

Grundprinzip für die gesamte Mathematik: Zum Verständnis – Einsetzen.

Und das gilt auf jeder Ebene, wo Mathematik betrieben wird, ob in der Schule oder an der Universität.

Wenn man etwas Abstraktes verstehen will: Einfach etwas Erlaubtes konkret einsetzen und so ein Beispiel konstruieren, anhand dessen man einen Sachverhalt studieren kann.

Hat man viele gute konkrete Beispiele studiert, wird einem der Sachverhalt deutlich, und man formuliert ihn abstrakt in der mathematischen Formelsprache.

Auf dieses Grundprinzip, das Zusammenspiel zwischen Abstraktion und konkreten Beispielen, werden wir im Vorkurs immer wieder hinweisen.

Aussagenlogik: Regeln der Logik

SFB 656 MoBil

Ist eine Aussage A wahr, sagen wir auch kurz "A gilt", und ist A falsch, auch "A gilt nicht".

Wir überlegen uns nun, wie neue Aussagen aus bestehenden Aussagen (nennen wir sie stellvertretend "A","B",...) gebildet werden können.

Hier sind A, B,... also Variablen, in die Aussagen eingesetzt werden können:

Z.B. "Die Aussage A ist richtig." ist eine Aussage, erst durch Einsetzen einer konkreten Aussage für A ist sie richtig oder falsch, wie z.B. "Die Aussage 0 = 1 ist richtig." ist falsch.

Anstelle von A soll jede Aussage eingesetzt werden können, sogar die obige Aussage selbst einzusetzen, ist erlaubt:

"Die Aussage A ist richtig."

"Die Aussage "Die Aussage A ist richtig." ist richtig." usw.

Fallen

SFB 656
MoBil

Durch Selbstbezug können einfach nicht entscheidbare Aussagen erzeugt werden:

Diese Aussage ist falsch.

Aussagen mit Selbstbezug lassen wir heute nicht zu.

Verknüpfung von Aussagen

Wir wollen nun Aussagen verknüpfen, d.h. Aussagen so zusammensetzen, dass neue Aussagen entstehen.
Etwa: Wir definieren eine Funktion und(A,B)(=A und B = A ∧ B), die den Wert wahr oder falsch liefert. A,B können dabei jeweils wahr oder falsch sein.

Wir müssen also für jede Kombination von wahr und falsch in A und B angeben, ob das Ergebnis wahr oder falsch ist.

Definition 5:

A	B	A ∧ B	A ∨ B	¬A
w	w	w	w	f
w	f	f	w	f
f	w	f	w	w
f	f	f	f	w

A ∧ B := A und B, A ∨ B := A oder B.

Verknüpfung von Aussagen

SFB 656 MoBil

Die Aussage $A \wedge B$ ist also genau dann wahr, wenn die beiden Aussagen A und B wahr sind, und sonst falsch. Die Aussage $A \vee B$ ist genau dann falsch, wenn beide Aussagen A und B falsch sind, und sonst wahr.

Definition 6: Die Aussage $\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist. (Man sagt "nicht A" für $\neg A$.)

Beispiel 7:

- Die Aussage $A \vee (\neg A)$ ist immer wahr. $A \wedge \neg A$ ist immer falsch.
- Durch Kombination von $\wedge, \vee, \neg$ kann eine Vielzahl weiterer Aussagen gebildet werden. Klammern sind dabei wichtig!
  Vergleiche $(A \vee B) \wedge B$ und $A \vee (B \wedge B)$.
- Die Verknüpfung $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$ kann man mit "entweder A oder B" ausdrücken. Das ist nicht eindeutig!

Normalisierung: Problem in der Informatik

Ich suche einen Flug nach Kreta und zurück in der Flugdatenbank.

Wenn der Flug in FMO beginnt, dann soll er auch dort enden.

A: Der Flug beginnt in FMO.
B: Der Flug endet in FMO.

Suche:

$$(A \land B) \lor ((\neg A) \land (\neg B))$$

$$\neg((A \land (\neg B)) \lor ((\neg A) \land B))$$

(was wäre denn schneller…?)

Mehr Variable

Bei Verknüpfungen von mehr als zwei Teilaussagen erhöht sich natürlich die Anzahl der möglichen Kombinationen, die Tabelle wird länger (2^n, n die Anzahl der Teilaussagen).

A	B	C	A∧B	(A∧B) ∧ C
w	w	w	w	w
w	w	f	w	f
w	f	w	f	f
w	f	f	f	f
f	w	w	f	f
f	w	f	f	f
f	f	w	f	f
f	f	f	f	f

Darstellbarkeit logischer Funktionen

SFB 656 MoBil

Gegeben seien n Aussagen A_1 bis A_n und eine (Boolesche) Funktion $f(A_1, \ldots, A_n)$ (oder anders: Gegeben sei eine Wahrheitstafel mit einem vorgegebenen Ergebnis).

Lässt sich die Funktion f durch einen logischen Ausdruck, der nur „nicht“ und „und“ enthält, darstellen?

Kann man ein Programm dazu schreiben (oder mathematisch: Kann man diesen Ausdruck konstruktiv angeben)?

Dieser automatische Ausdruck wäre lang. Wie können wir ihn verkürzen?

Schlussfolgerung/Implikation/Folgerung

Definition 8: $A \Rightarrow B$ heißt Implikation und ist definiert durch

$$A \Rightarrow B := B \vee (\neg A)$$

A	**B**	**A ⇒ B**
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Implikation

Wir sagen dafür auch "aus der Aussage A folgt die Aussage B", oder kurz "aus A folgt B". Diese Aussage ist wahr, wenn A und B wahr ist (aber auch, wenn A falsch ist!).
Schlussfolgern geht nun so: "Gilt $A \Rightarrow B$ und A, so folgt B".
Das heißt: Ist A wahr und auch die Aussage $A \Rightarrow B$ (d.h. für eine bestimmte Aussage B), so ist auch B wahr. Mit "gilt..." bzw. "gilt die Aussage...", ist gemeint, dass man die Wahrheit der Aussage A annimmt. Aus dieser wird dann auf die Wahrheit von B geschlossen.
Man kann das auch so sehen: Ist die Aussage $A \Rightarrow B$ wahr, so ist dies eine verwendbare Schlussregel. Gilt dann A (d.h. ist A wahr), so ist dann auch B wahr.

Ex falso...

Man beachte dabei: A ⇒ B ist stets wahr, wenn A falsch ist.
Es ist ein wichtiges logisches Prinzip, dass aus einer falschen Aussage A eine beliebige andere Aussage folgt: die Verknüpfung ergibt stets eine wahre Aussage ("ex falso quodlibet" = "aus Falschem folgt Beliebiges").
Denn als (mathematische) Aussage gesehen kann A ⇒ B nur dann falsch sein, wenn A wahr und B falsch ist. Dies widerstrebt oft dem umgangssprachlichen Alltagsgebrauch von "wenn / dann", wo nicht vorgesehen ist, dass A auch falsch sein könnte.

Ein Beispiel dafür, wo wir sehen, dass diese Wahrheitstafel für $A \Rightarrow B$ mathematisch sinnvoll ist: Für alle reellen Zahlen x gilt:

$$x > 2 \Rightarrow x^2 > 4.$$

Wir nehmen an: Wir haben gezeigt, dass diese Implikation sich aus unseren Axiomen herleiten lässt. Dann können wir sie nutzen durch Einsetzen, z.B. für $x = 3$:

$$3 > 2 \Rightarrow 3^2 > 4$$

$x=0$:

$$0 > 2 \Rightarrow 0^2 > 4$$

$x = -3$:

$$-3 > 2 \Rightarrow (-3)^2 > 4$$

Notwendig und hinreichend

SFB 656 MoBil

Es gelte $A \Rightarrow B$.

Damit B gilt, ist hinreichend, dass A gilt. A ist hinreichend für B.

Wenn A gilt, muss B notwendig auch gelten. B ist notwendig für A.
Wenn nicht B, dann auch nicht A.

Auch

"daraus folgt" oder "impliziert" kann für das Implikationszeichen gesagt werden. Die Hintereinanderreihung von mehreren Implikationen schreibt man auch einfach hintereinander, z.B. $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ als Abkürzung für $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$. Vergleichen Sie dies auch mit den Aussagen $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ und $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$!

„Definition“ Beweis

SFB 656 MoBil

Ein Beweis eines Satzes X ist eine Implikationskette

$A \Rightarrow B \Rightarrow C \ldots \Rightarrow X$

bei der jede Implikation wahr ist und A eine wahre Aussage ist.

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Äquivalenz

Definition 9: Die Rückrichtung einer Implikation $A \Rightarrow B$ ist die Implikation $B \Rightarrow A$.

Die Rückrichtung ist i.a. eine andere Aussage mit anderen Wahrheitswerten. Falls mit einer Implikation auch die Rückrichtung gilt, spricht man von Äquivalenz:

Definition 10: Die Äquivalenz zweier Aussagen A und B ist die Aussage $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Man schreibt dafür abkürzend $A \Leftrightarrow B$. In einer Äquivalenz nennt man die Implikation $A \Rightarrow B$ die Hinrichtung, und $B \Rightarrow A$ die Rückrichtung der Äquivalenz.

Äquivalenz

SFB 656 MoBil

Man formuliert eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ auch so: "A ist genau dann wahr, wenn B gilt". Oder auch: "A gilt genau dann, wenn B gilt". Oder: "A gilt dann und nur dann, wenn B gilt". Das bedeutet alles, dass A und B denselben Wahrheitsgehalt besitzen.

Die Hintereinanderreihung mehrerer Äquivalenzen schreibt man auch kurz als $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \ldots$ und ist die Aussage, dass alle diese Aussagen A,B,C,... denselben Wahrheitswert haben. Diese Hintereinanderreihung ist die Abkürzung für

$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \wedge \ldots$

Falls gilt $A \Leftrightarrow B$, so ist B hinreichend und notwendig für A, und A ist hinreichend und notwendig für B.

Äquivalenz

SFB 656 MoBil

Die wichtigsten Logikregeln beschreiben nun, wie Aussagen äquivalent umformuliert werden können (Regeln 1-4, 8 und 9) bzw. wie man mit gewissen Aussagen schließen kann (Regeln 5,6 und 7).

Diese Regeln selbst sind immer wahre Aussagen, egal welche Aussagen A,B,C man einsetzt. Sie lassen sich durch Vergleich der jeweiligen Wahrheitswerte beweisen, oder auch durch Zurückführen auf schon bewiesene Aussagen.

In der Informatik werden sie genutzt zur Reduktion und Normierung von logischen Ausdrücken.

Logikregeln

SFB 656 MoBiL

Tabelle mit den wichtigsten Logikregeln:

1 $A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$

2 $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

3 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

4 $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

5 $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$

6 $((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$

7 $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

8 $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

9 $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Klammeritis

Bei arithmetischen Ausdrücken gilt: Punkt vor Strich.

Zum Klammersetzen bei Formeln mit Aussagen: das Zeichen $\neg$ bindet stärker als $\wedge$ bindet stärker als $\vee$ bindet stärker als $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$.

Beispiel 11:
$(A \Rightarrow B) \wedge C$ ist prinzipiell eine andere Aussage als $A \Rightarrow B \wedge C$, mit welcher die Aussage $A \Rightarrow (B \wedge C)$ gemeint ist. Tatsächlich: Denn ist A eine falsche Aussage (setzen wir gewissermaßen den Wahrheitswert "falsch" für A ein), und C falsch, so ist die erste Aussage falsch, die zweite aber wahr, deswegen müssen sie verschieden sein. Um das zu erkennen, mussten wir also nur einen Unterschied in der Wahrheitstabelle finden.

Aussagenäquivalenz

Um zu sehen, dass zwei Aussagen äquivalent sind, müssen wir hingegen die ganze Wahrheitstabelle durchchecken: Wir beweisen die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \land \neg B)$ durch Vergleich der Wahrheitswerte von $A \Rightarrow B$ und $\neg(A \land \neg B)$:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \land \neg B)$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w