K. Halupczok

Zum ternären Goldbachproblem mit Kongruenzbedingungen an die Primzahlen

Abstract.

MSC numbers:

1. Einleitung

I. M. Vinogradov zeigte 1937 in [**1**], daß für alle hinreichend großen ungeraden $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $n = p_1 + p_2 + p_3$ Lösungen mit Primzahlen p_1, p_2, p_3 besitzt. Für das berühmte „ternäre Goldbachproblem", die Frage, ob sich jedes ungerade $n \geq 7$ als Summe dreier Primzahlen schreiben läßt, lassen sich zahlreiche Varianten formulieren, indem man zusätzliche Bedingungen an die Primzahlen stellt, etwa eine Kongruenzbedingung $p_1 \equiv a_1 \pmod{q_1}$ an die erste der drei Primzahlen; $q_1 > 1$ und $a_1 < q_1$ sind dabei feste teilerfremde ganze Zahlen.

Für die Zahl

$$J_3(n) := \sum_{\substack{p_1+p_2+p_3=n \\ p_1 \equiv a_1 \pmod{q_1}}} \log p_1 \, \log p_2 \, \log p_3,$$

die eng mit der Anzahl Lösungen, n als Summe dreier Primzahlen p_1, p_2, p_3 mit $p_1 \equiv a_1 \pmod{q_1}$ zu schreiben, zusammenhängt, fand A. Zulauf in [**2**] und [**3**] für $q_1 \leq \log^D n$ ($D > 0$ fest) die asymptotische Formel

$$J_3(n) = \frac{n^2 \mathcal{S}_3(n)}{2\varphi(q_1)} + O\left(\frac{n^2}{\log^A n}\right), \qquad \text{für alle } A > 0.$$

Die singuläre Reihe $\mathcal{S}_3(n)$ hängt dabei von a_1 und q_1 ab, die O-Konstante nur von D und A.

Interessant ist die Frage, ob für den Modul q_1 größere Schranken als $\log^D n$ genommen werden können, so daß die Abweichung der Zahl $J_3(n)$ vom Hauptterm mit der singulären Reihe im Mittel klein bleibt, nämlich ob

$$\mathcal{E} := \sum_{q_1 \leq n^{\theta_1}} \max_{(a_1,q_1)=1} \left| J_3(n) - \frac{n^2 \mathcal{S}_3(n)}{2\varphi(q_1)} \right| \ll \frac{n^2}{\log^A n}$$

für jedes positive feste $\theta_1 <$ ı2 und $A > 0$ gilt.

D. I. Tolev zeigt dies in [4] für $\theta_1 < \frac{1}{3}$. Er benutzt dafür den folgenden Ansatz mit der Kreismethode. Sei

$$S_1(\alpha) := \sum_{\substack{p \le n \\ p \equiv a_1 (\mathrm{mod} q_1)}} \log p \cdot e(\alpha p) \quad \text{und} \quad S(\alpha) := \sum_{p \le n} \log p \cdot e(\alpha p),$$

dann ist

$$J_3(n) = \int_{-\frac{R}{n}}^{1-\frac{R}{n}} S_1(\alpha) S^2(\alpha) e(-n\alpha)\, d\alpha,$$

wobei positives $R \le n^{\frac{1}{2}}$ zugelassen sei; wie R dabei zu setzen ist, behandeln wir später.

Zerlegen wir das reelle Intervall $[-\frac{R}{n}, 1 - \frac{R}{n}]$ in die major arcs

$$\mathfrak{M} := \bigcup_{q \le \frac{R}{2}} \bigcup_{\substack{a < q \\ (a,q)=1}} \left(\frac{a}{q} - \frac{R}{qn}, \frac{a}{q} + \frac{R}{qn} \right)$$

und in die minor arcs $\mathfrak{m} := \left[-\frac{R}{n}, 1 - \frac{R}{n}\right] \setminus \mathfrak{M}$, so bezeichnen wir mit

$$J_3^{\mathfrak{M}}(n) := \int_{\mathfrak{M}} S_1(\alpha) S^2(\alpha) e(-n\alpha)\, d\alpha$$

den Beitrag von $J_3(n)$ zu den major arcs, und entsprechend mit $J_3^{\mathfrak{m}}(n)$ den auf den minor arcs. Den mittleren Fehler $\mathcal{E}$ schätzen wir ab mit der Summe aus

$$\mathcal{E}^{\mathfrak{M}} := \sum_{q_1 \le n^{\theta_1}} \max_{(a_1,q_1)=1} \left| J_3^{\mathfrak{M}}(n) - \frac{n^2 \mathcal{S}_3(n)}{2\varphi(q_1)} \right|$$

und

$$\mathcal{E}^{\mathfrak{m}} := \sum_{q_1 \le n^{\theta_1}} \max_{(a_1,q_1)=1} |J_3^{\mathfrak{m}}(n)|\,.$$

D. I. Tolev zeigt in [4], daß $\mathcal{E}^{\mathfrak{M}} \ll \dfrac{n^2}{\log^A n}$ für $\theta_1 < \dfrac{1}{2}$ gilt, und zwar mit Hilfe des Satzes von Bombieri und Vinogradov, wobei $R = \log^B n$ mit $B \ge A + 5$ verwendet wird. Die problematische Abschätzung $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}} \ll \dfrac{n^2}{\log^A n}$ auf den minor arcs gelingt ihm nur für $\theta_1 < \dfrac{1}{3}$.

Mit der folgenden Methode zur Behandlung der minor arcs nach einer Idee von Jan-Christoph Schlage-Puchta läßt sich diese Abschätzung für $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}$ wie folgt auch für $\theta_1 \le \frac{1}{2}$ zeigen, allerdings nur für prime Moduln q_1.

Wir betrachten neben $J_3(n)$ für natürliches $m \le n$ noch

$$J_2(m) := \sum_{p_2 + p_3 = m} \log p_2 \, \log p_3$$

und zerlegen $J_2(m)$ ebenso in den Anteil auf $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{m}$ gemäß

$$\begin{aligned} J_2(m) &= \int_{-\frac{R}{n}}^{1-\frac{R}{n}} S^2(\alpha)\, e(-m\alpha)\, d\alpha \\ &= \left(\int_{\mathfrak{M}} + \int_{\mathfrak{m}}\right) S^2(\alpha)\, e(-m\alpha)\, d\alpha =: J_2^{\mathfrak{M}}(m) + J_2^{\mathfrak{m}}(m). \end{aligned}$$

Für $J_2^{\mathfrak{m}}(m)$ benötigen wir zwei Abschätzungen, zum einen die triviale

$$J_2^{\mathfrak{m}}(m) \ll \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{p\le n} \log^2 p \ll n \log n, \tag{1}$$

und zum anderen, indem wir die Besselsche Ungleichung anwenden, die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{m\le n} |J_2^{\mathfrak{m}}(m)|^2 &\le \int_{\mathfrak{m}} |S^2(\alpha)|^2 d\alpha \le \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \cdot \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^2 \\ &\ll n \log n \cdot \frac{n^2}{\log^{B-8} n} = \frac{n^3}{\log^{B-9} n}, \end{aligned} \tag{2}$$

zur letzten Abschätzung von $|S(\alpha)|$ auf $\mathfrak{m}$ siehe R. C. Vaughan [**5**], Theorem 3.1. Dabei wird $R \ge \log^B n$ benutzt. Damit schätzen wir jetzt einen Summenabschnitt von $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}$ ab, für festes $Q_1 \le n^{\theta_1}$ nämlich

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{Q_1} := \sum_{Q_1<q_1\le 2Q_1} \max_{(a_1,q_1)=1} |J_3^{\mathfrak{m}}(n)| &\le \sum_{q_1} \max_{a_1} \sum_{\substack{p_1\le n \\ p_1\equiv a_1 \,(\mathrm{mod}\, q_1)}} \log p_1\, |J_2^{\mathfrak{m}}(n-p_1)| \\ &\le \sum_{q_1} \max_{a_1} \sum_{\substack{m\le n \\ m\equiv n-a_1 (\mathrm{mod}\, q_1)}} \log n\, |J_2^{\mathfrak{m}}(m)|. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Anzahl

$$N(a_1, q_1) := \# \left\{ m \le n\,; \quad m \equiv n - a_1 \ (\mathrm{mod}\, q_1), \quad |J_2^{\mathfrak{m}}(m)| > \frac{n}{\log^{A+2} n} \right\}$$

der natürlichen Zahlen $m \le n$ mit $m \equiv n - a_1 \pmod{q_1}$, für die $|J_2^{\mathfrak{m}}(m)|$ groß ist. (Für $0 \le a_1 < q_1$ mit $(a_1, q_1) > 1$ sei $N(a_1, q_1) := 0$.) Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{Q_1}^{\mathfrak{m}} &\le \sum_{q_1} \max_{a_1} \Bigg(\sum_{\substack{m \le n \\ m \equiv n - a_1 \pmod{q_1} \\ |J_2^{\mathfrak{m}}(m)| > \frac{n}{\log^{A+2} n}}} \log n \, |J_2^{\mathfrak{m}}(m)| + \\
&\qquad\qquad + \sum_{\substack{m \le n \\ m \equiv n - a_1 \pmod{q_1} \\ |J_2^{\mathfrak{m}}(m)| \le \frac{n}{\log^{A+2} n}}} \log n \, \frac{n}{\log^{A+2} n} \Bigg) \\
&\overset{(1)}{\ll} \sum_{q_1} \max_{a_1} \; n \log^2 n \; N(a_1, q_1) + \sum_{q_1} \frac{n}{q_1} \log n \, \frac{n}{\log^{A+2} n} \\
&\ll n \log^2 n \; \sum_{q_1} \max_{a_1} N(a_1, q_1) + \frac{n^2}{\log^{A+1} n} \\
&\ll n \log^2 n \; Q_1^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{q_1} \max_{a_1} N(a_1, q_1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{n^2}{\log^{A+1} n},
\end{aligned}$$

der letzte Schritt nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und $Q_1 < q_1 \le 2Q_1$. Mit $N := \sum_{0 \le a_1 < q_1} N(a_1, q_1)$ erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{Q_1}^{\mathfrak{m}} &\ll n \log^2 n \; Q_1^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{q_1} \max_{a_1} \left| N(a_1, q_1) - \frac{N}{q_1} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + n \log^2 n \cdot N + \frac{n^2}{\log^{A+1} n} \\
&\ll n \log^2 n \; \left(\sum_{q_1} q_1 \sum_{0 \le a_1 < q_1} \left| N(a_1, q_1)^2 - \frac{N}{q_1} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + nN \log^2 n + \frac{n^2}{\log^{A+1} n}.
\end{aligned}$$

Nach der arithmetischen Version des großen Siebes, nämlich

$$\sum_{\substack{q_1 \le 2Q_1 \\ \text{prim}}} q_1 \sum_{a_1 = 1}^{q_1} \left| N(a_1, q_1) - \frac{N}{q_1} \right|^2 \le (n + 4Q_1^2) N,$$

folgt

$$\mathcal{E}_{Q_1}^{\mathfrak{m}} \ll n \log^2 n \, (n + Q_1^2)^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}} + nN \log^2 n + \frac{n^2}{\log^{A+1} n}.$$

Sei

$$\mathcal{N} := \left\{ m \le n \; ; \; |J_2^{\mathfrak{m}}(m)| > \frac{n}{\log^{A+2} n} \right\},$$

dann ist

$$\left(N \frac{n}{\log^{A+2} n} \right)^2 < \left(\sum_{m \in \mathcal{N}} |J_2^{\mathfrak{m}}(m)| \right)^2 \le N \sum_{m \le n} |J_2^{\mathfrak{m}}(m)|^2 \ll N \frac{n^3}{\log^{B-9} n}$$

nach (2), also ist

$$N \ll \frac{n}{\log^{B-2A-13} n}.$$

Somit folgt unter Verwendung von $Q_1 \leq n^{\frac{1}{2}}$, daß gilt:

$$\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{Q_1} \ll n \log^2 n \frac{n}{\log^{B/2-A-13/2} n} + \frac{n^2}{\log^{B-2A-15} n} + \frac{n^2}{\log^{A+1} n} \ll \frac{n^2}{\log^{A+1} n},$$

falls $B/2 - A - 17/2 > A + 1 \Leftrightarrow B > 4A + 19$ gewählt wurde.

Schließlich folgt

$$\mathcal{E}^{\mathfrak{m}} \leq \sum_{i, Q_1 = 2^i \leq n^{\theta_1}} \mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{Q_1} \ll \log n \cdot \frac{n^2}{\log^{A+1} n} \ll \frac{n^2}{\log^A n}.$$

2. Das ternäre Goldbachproblem mit drei Kongruenzbedingungen

Für $i = 1, 2, 3$ seien a_i und q_i teilerfremde ganze Zahlen. Wir behandeln jetzt das Problem, ob sich alle hinreichend großen n als Summe dreier Primzahlen p_1, p_2, p_3 mit $p_i \equiv a_i \,(\bmod\, q_i)$, $i = 1, 2, 3$, schreiben läßt.

Wir betrachten dazu die Zahl

$$\begin{aligned} J_3(n) &:= \sum_{\substack{(m_1, m_2, m_3) \\ m_1 + m_2 + m_3 = n \\ m_i \equiv a_i \,(\bmod\, q_i),\, i = 1,2,3}} \Lambda(m_1)\Lambda(m_2)\Lambda(m_3) \\ &= \int_{-\frac{R}{n}}^{1-\frac{R}{n}} S_1(\alpha) S_2(\alpha) S_3(\alpha) e(-n\alpha)\, d\alpha, \end{aligned}$$

mit der von Mangoldt-Funktion Λ und den zugehörigen Exponentialsummen

$$S_i(\alpha) = \sum_{\substack{m \leq n, \\ m \equiv a_i \,(\bmod\, q_i)}} \Lambda(m) e(\alpha m), \quad i = 1, 2, 3.$$

Für $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \leq \frac{1}{2}$ betrachten wir den mittleren Fehlerterm

$$\mathcal{E} := \sum_{\substack{q_i \leq n^{\theta_i}, \\ i = 1,2,3}} \max_{\substack{(a_i, q_i) = 1, \\ i = 1,2,3}} \left| J_{(3)}(n) - \frac{n^2 \mathcal{S}_3(n)}{2\varphi(q_1)\varphi(q_2)\varphi(q_3)} \right|,$$

wobei die singuläre Reihe $\mathcal{S}_3(n)$ jetzt abhängig von den a_i und q_i ist. Wieder ist es das Ziel, zu zeigen, daß

$$\mathcal{E} \ll \frac{n^2}{\log^A n} \tag{3}$$

gilt, und zwar für alle $\theta_1 < \frac{1}{2}$ und θ_2, θ_3 möglichst groß.

Wir machen für die major und minor arcs den gleichen Ansatz wie oben, und wir betrachten jetzt neben $J_3(n)$ noch

$$J_2(m) := \sum_{\substack{(m_2, m_3) \\ m_2 + m_3 = m \\ m_i \equiv a_i \,(\bmod\, q_i),\, i = 2,3}} \Lambda(m_1)\Lambda(m_2).$$

Es sei hier nur erwähnt, daß die vorige Abschätzung für $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{Q_1}$ analog für einen Summenabschnitt $\mathcal{E}^{\mathfrak{m}}_{Q_1,Q_2,Q_3}$ durchgeht, lediglich mit kleinen Modifikationen. Wieder benötigt man allerdings die Voraussetzung, daß die Moduln q_1 alle prim sind. Wesentlich anders ist dabei nur die Ungleichung (2), wir brauchen für die Rechnung stattdessen die Abschätzung

$$\sum_{\substack{Q_2<q_2\leq 2Q_2\\ Q_3<q_3\leq 2Q_3}} \sum_{m\leq n} \max_{a_2,a_3} |J_2^{\mathfrak{m}}(m)|^2 \ll \frac{n^2}{Q_2^2Q_3^2\log^C n}$$

(mit einem $C > 0$ abhängig von A). Wir erhalten diese folgendermaßen. Die Anwendung der Besselschen Ungleichung – wie oben – zeigt

$$\begin{aligned}
\sum_{q_2,q_3} \max_{a_2,a_3} \sum_{m\leq n} |J_2^{\mathfrak{m}}(m)|^2 &\leq \sum_{q_2,q_3} \max_{a_2,a_3} \int_{\mathfrak{m}} |S_2(\alpha)S_3(\alpha)|^2 d\alpha \\
&\leq \sum_{q_2} \max_{a_2} \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S_2(\alpha)|^2 \sum_{q_3} \max_{a_3} \int_0^1 |S_3(\alpha)|^2 d\alpha \\
&\ll \sum_{q_2} \max_{a_2} \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S_2(\alpha)|^2 \sum_{q_3} \frac{n\log n}{\varphi(q_3)} \\
&\ll n\log^2 n \sum_{q_2} \max_{a_2} \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S_2(\alpha)|^2,
\end{aligned}$$

also bleibt zu zeigen, daß

$$\sum_{q_2} \max_{a_2} \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S_2(\alpha)|^2 \ll \frac{n^2}{Q_2^2Q_3^2\log^{C+2} n}$$

ist. Nun läßt sich $|S_2(\alpha)|$ auf $\mathfrak{m}$ nichttrivial abschätzen: Für $\alpha \in \mathfrak{m}$ gibt es laut Dirichletschem Approximationssatz teilerfremde ganze Zahlen a und q, wobei $1 \leq q \leq \frac{n}{R}$, $0 \leq a < q$, mit

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{R}{qn} < \frac{2}{n},$$

da $\frac{R}{2} < q$ wegen $\alpha \in \mathfrak{m}$ gilt. Nach dem Satz von A. Balog und A. Perelli in [**6**] ist dann

$$S_2(\alpha) \ll \left(\frac{nh}{q^{1/2}q_2} + \frac{q^{1/2}n^{1/2}}{h^{1/2}} + \frac{n^{4/5}}{q_2^{2/5}}\right)\log^3 n,$$

wobei $h = (q, q_2)$ ist. Also gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{q_2} \max_{a_2} \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S_2(\alpha)|^2 &\ll \sum_{q_2} \left(\frac{n^2h^2}{Rq_2^2} + \frac{n^2}{Rh} + \frac{n^{8/5}}{q_2^{4/5}}\right)\log^6 n \\
&\ll \sum_{q_2} \left(\frac{n^2}{R} + \frac{n^{8/5}}{q_2^{4/5}}\right)\log^6 n \ll \left(\frac{n^2}{R}Q_2 + Q_2\frac{n^{8/5}}{Q_2^{4/5}}\right)\log^6 n \\
&= n^2\left(\frac{Q_2}{R} + \frac{Q_2^{1/5}}{n^{2/5}}\right)\log^6 n,
\end{aligned}$$

und dies ist

$$\ll \frac{n^2}{Q_2^2 Q_3^2 \log^{C+2} n},$$

falls einerseits

$$R \gg Q_2^3 Q_3^2 \log^{C+8} n, \tag{4}$$

und andererseits $Q_2^{11/5} Q_3^2 \log^{C+8} n \ll n^{2/5}$ gilt, also falls

$$11\,\theta_2 + 10\,\theta_3 < 2 \tag{5}$$

ist, etwa für $\theta_2 \leq \frac{1}{11}$, $\theta_3 < \frac{1}{10}$ und $\theta_1 \leq \frac{1}{2}$. Für die Grenzen der n-Exponenten der Moduln q_2 und q_3 gemäß (5) läßt sich somit der Beweis von (3) auf den minor arcs ausführen.

Möchte man den Bereich für die Moduln q_2 oder q_3 zu n-Potenzen erweitern, muß man wegen (4) dann auch für R eine Potenz von n ansetzen. Es zeigt sich, daß jetzt die major arcs $\mathfrak{M}$ problematisch sind. Denn D. I. Tolevs Methode, dort den Satz von Bombieri und Vinogradov einzusetzen, ist nur dann übertragbar, wenn für R wieder eine log-Potenz genommen wird. Aber wegen der obigen Abschätzung (4) geht das nur, wenn sowohl q_2 als auch q_3 ebenfalls höchstens log-Potenzen sind. In diesem Fall, also für $q_1 < n^{\frac{1}{2}}$ prim, $q_2 \leq \log^{\vartheta_2} n$, $q_3 \leq \log^{\vartheta_3} n$, mit $\vartheta_2, \vartheta_3 > 0$, läßt sich die Abschätzung (3) tatsächlich zeigen – sowohl auf $\mathfrak{m}$ (wie oben, dann aber nur für prime Moduln q_1) als auch auf $\mathfrak{M}$ (wie bei D. I. Tolev, für beliebige Moduln $q_1 < n^{\frac{1}{2}}$).

Literatur

[1] I. M. Vinogradov, *Representations of an Odd Number as a Sum of Three Primes*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **15** (1937), 169-172

[2] A. Zulauf, *Über die Darstellung natürlicher Zahlen als Summen von Primzahlen aus gegebenen Restklassen und Quadraten mit gegebenen Koeffizienten. I: Resultate für genügend große Zahlen*, J. Reine Angew. Math. **192** (1954), 210-290; *II: Die Singuläre Reihe*, J. Reine Angew. Math. **193** (1954), 39-53

[3] A. Zulauf, *On the Number of Representation of an Integer as a Sum of Primes Belonging to Given Arithmetical Progressions*, Compositio Math. **15** (1961), 64-90

[4] D. I. Tolev, *On the Number of Representations of an Odd Integer as a Sum of Three Primes, one of which belongs to an Arithmetic Progression*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **218** (1997), 414-432

[5] R. C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood Method*, Cambridge Univ. Press 1981

[6] A. Balog, A. Perelli, *Exponential sums over primes in an arithmetic progression*, Proc. Amer. Math. Soc. **vol. 93(4)** (1985), 578-582

Karin Halupczok