Große Fortschritte bei kleinen Primzahllücken

large steps with small gaps

(aus Anlass des WWU-Alumni-Tags 2015)

PD Dr. Karin Halupczok

27. Juni 2015, Mathematisches Institut der WWU Münster

Zur Verteilung der Primzahlen

Primzahlzwillinge

Neue Fortschritte bei kleinen Primzahllücken

Primzahlen

Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

$a \in \mathbb{N}$ heißt Teiler von $b \in \mathbb{N}$, falls es ein $c \in \mathbb{N}$ gibt mit $ac = b$

Primzahlen

Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

$a \in \mathbb{N}$ heißt Teiler von $b \in \mathbb{N}$, falls es ein $c \in \mathbb{N}$ gibt mit $ac = b$

Eine natürliche Zahl p heißt *prim* bzw. Primzahl, wenn sie genau zwei natürliche Teiler hat (nämlich 1 und $p \neq 1$).

Primzahlen

Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

$a \in \mathbb{N}$ heißt Teiler von $b \in \mathbb{N}$, falls es ein $c \in \mathbb{N}$ gibt mit $ac = b$

Eine natürliche Zahl p heißt *prim* bzw. Primzahl, wenn sie genau zwei natürliche Teiler hat (nämlich 1 und $p \neq 1$).

Folge der Primzahlen:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ \dots$$

Euklid

Bilder/Euklid.png

Euklid von Alexandria, ca. 300 v. Chr.

Euklid

Bilder/Euklid.png

Euklid von Alexandria, ca. 300 v. Chr.

Satz von Euklid:

Es existieren unendlich viele Primzahlen.

Euklid

`Bilder/Euklid.png`

Euklid von Alexandria, ca. 300 v. Chr.

Satz von Euklid:

Es existieren unendlich viele Primzahlen.

Sind $p_1, \dots, p_n$ Primzahlen, so gibt es einen Primteiler p_{n+1} von $p_1 \cdots p_n + 1$, der von den $p_1, \dots, p_n$ verschieden ist.

Euklid

Bilder/Euklid.png

Euklid von Alexandria, ca. 300 v. Chr.

Satz von Euklid:

Es existieren unendlich viele Primzahlen.

Sind $p_1, \ldots, p_n$ Primzahlen, so gibt es einen Primteiler p_{n+1} von $p_1 \cdots p_n + 1$, der von den $p_1, \ldots, p_n$ verschieden ist.

Größte numerisch bekannte Primzahl

Größte bekannte Primzahl aktuell:

$$2^{57.885.161} - 1$$

mit 17.425.170 Stellen (vermutlich die 48. Mersennesche Primzahl)

Größte numerisch bekannte Primzahl

Größte bekannte Primzahl aktuell:

$$2^{57.885.161} - 1$$

mit 17.425.170 Stellen (vermutlich die 48. Mersennesche Primzahl)

Bekannt seit 25.1.2013 durch das Internet-Projekt GIMPS
GIMPS: Great Internet Mersenne Prime Search

`http://www.mersenne.org/`

Erstellung von Primzahllisten

Antikes Sieb des Eratosthenes (ca. 273–194 v. Chr.):
Verfahren zur Erstellung von Primzahllisten

Erstellung von Primzahllisten

Antikes Sieb des Eratosthenes (ca. 273–194 v. Chr.):
Verfahren zur Erstellung von Primzahllisten

z. B. die Liste aller Primzahlen zwischen 10 und 100:

Erstellung von Primzahllisten

Antikes Sieb des Eratosthenes (ca. 273–194 v. Chr.):
Verfahren zur Erstellung von Primzahllisten

z. B. die Liste aller Primzahlen zwischen 10 und 100:

Jede zusammengesetzte Zahl $n \leq 100$ hat einen Primteiler $\leq 10 = \sqrt{100}$,

Erstellung von Primzahllisten

Antikes Sieb des Eratosthenes (ca. 273–194 v. Chr.):
Verfahren zur Erstellung von Primzahllisten

z. B. die Liste aller Primzahlen zwischen 10 und 100:

Jede zusammengesetzte Zahl $n \leq 100$ hat einen Primteiler $\leq 10 = \sqrt{100}$, denn wären sonst p, q zwei Primteiler > 10 von n, so wäre $n \geq pq > 10 \cdot 10 = 100$.

Erstellung von Primzahllisten

Antikes Sieb des Eratosthenes (ca. 273–194 v. Chr.):
Verfahren zur Erstellung von Primzahllisten

z. B. die Liste aller Primzahlen zwischen 10 und 100:

Jede zusammengesetzte Zahl $n \leq 100$ hat einen Primteiler $\leq 10 = \sqrt{100}$, denn wären sonst p, q zwei Primteiler > 10 von n, so wäre $n \geq pq > 10 \cdot 10 = 100$.

Idee: Streiche in der Liste 1,2,. . . ,100 alle Vielfachen von $2, 3, 5, 7$

Animation des Siebes von Eratosthenes

~~01~~	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Animation des Siebes von Eratosthenes

~~01~~	~~02~~	03	~~04~~	05	~~06~~	07	~~08~~	09	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

Streiche alle *n*, die *n* durch 2 teilbar sind.

Animation des Siebes von Eratosthenes

~~01~~	~~02~~	~~03~~	~~04~~	05	~~06~~	07	~~08~~	~~09~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Streiche alle n, die n durch 3 teilbar sind.

Animation des Siebes von Eratosthenes

~~01~~	~~02~~	~~03~~	~~04~~	~~05~~	~~06~~	07	~~08~~	~~09~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Streiche alle n, die n durch 5 teilbar sind.

Animation des Siebes von Eratosthenes

~~01~~	~~02~~	~~03~~	~~04~~	~~05~~	~~06~~	~~07~~	~~08~~	~~09~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Streiche alle n, die n durch 7 teilbar sind.

Animation des Siebes von Eratosthenes

~~01~~	~~02~~	~~03~~	~~04~~	~~05~~	~~06~~	~~07~~	~~08~~	~~09~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Ergebnis: Alle Primzahlen $10 < p < 100$

Numerische Beobachtungen

Bilder/Gauss.png

Carl Friedrich Gauß, 1777–1855

Numerische Beobachtungen

Bilder/Gauss.png

Carl Friedrich Gauß, 1777–1855

Vermutung von Gauß (1849):
Bis zu einer Schranke x gibt es ziemlich genau
$x/log\ x$ bzw. $\mathrm{li}(x)$ viele Primzahlen

Numerische Beobachtungen

Bilder/Gauss.png

Carl Friedrich Gauß, 1777–1855

Vermutung von Gauß (1849):
Bis zu einer Schranke x gibt es ziemlich genau $x/log\ x$ bzw. $\mathrm{li}(x)$ viele Primzahlen

$\mathrm{li}(x)$ bezeichnet das logarithmische Integral

$$\mathrm{li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} \approx \frac{x}{\log x},$$

wobei log der natürliche Logarithmus zur Basis $e = 2.71828182845...$ ist.

Numerische Beobachtungen

Bilder/Gauss.png

Carl Friedrich Gauß, 1777–1855

Vermutung von Gauß (1849):
Bis zu einer Schranke x gibt es ziemlich genau
$x/log\ x$ bzw. $\mathrm{li}(x)$ viele Primzahlen

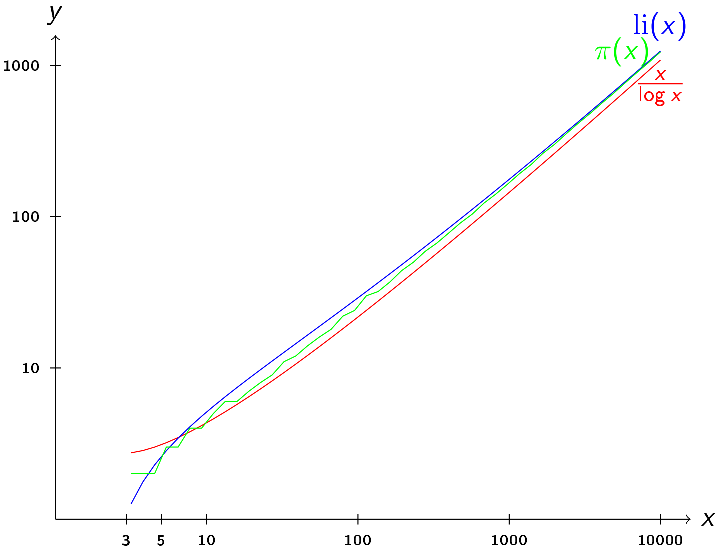
$\mathrm{li}(x)$ bezeichnet das logarithmische Integral

$$\mathrm{li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} \approx \frac{x}{\log x},$$

wobei log der natürliche Logarithmus zur Basis $e = 2.71828182845\ldots$ ist.

Die Funktionen $\mathrm{li}(x)$ und $\frac{x}{\log x}$ im Schaubild zusammen mit der Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen $\leq x$:

Schaubild von $\pi(x)$, $\mathrm{li}(x)$ und $x/\log x$:



Der Primzahlsatz

Bilder/Hadamard.png

Jacques Hadamard, 1865–1963

Bilder/dlVP.png

Charles-Louis-Joseph-Xavier de la Vallée-Poussin, 1827–1903

Der Primzahlsatz

Bilder/Hadamard.png

Jacques Hadamard, 1865–1963

Bilder/dlVP.png

Charles-Louis-Joseph-Xavier de la Vallée-Poussin, 1827–1903

Hadamard und de la Vallée–Poussin (1896):
Beweis der Gaußschen Vermutung, heute bekannt als:

Der Primzahlsatz

Bilder/Hadamard.png

Jacques Hadamard, 1865–1963

Bilder/dlVP.png

Charles-Louis-Joseph-Xavier de la Vallée-Poussin, 1827–1903

Hadamard und de la Vallée–Poussin (1896):
Beweis der Gaußschen Vermutung, heute bekannt als:
Primzahlsatz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)} = 1.$$

Die Riemannsche Vermutung

Wie gut ist die Approximation von $\pi(x)$ an $\mathrm{li}(x)$?

Die Riemannsche Vermutung

Wie gut ist die Approximation von $\pi(x)$ an $\mathrm{li}(x)$?

Bilder/Riemann.png

Bernhard Riemann, 1826–1866

Die Riemannsche Vermutung

Wie gut ist die Approximation von $\pi(x)$ an $\mathrm{li}(x)$?

`Bilder/Riemann.png`

Bernhard Riemann, 1826–1866

Riemannsche Vermutung:

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leq C\,\sqrt{x}\log x$$

Die Riemannsche Vermutung

Wie gut ist die Approximation von $\pi(x)$ an $\mathrm{li}(x)$?

`Bilder/Riemann.png`

Bernhard Riemann, 1826–1866

Riemannsche Vermutung:

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leq C \sqrt{x} \log x$$

Bis heute ungelöst, eines der sieben Millennium-Probleme des Clay Mathematics Institute, die 2000 bekanntgegeben wurden (Preisgeld jeweils: 1.000.000 US-Dollar)

Bestes Ergebnis zur Riemannschen Vermutung derzeit

Das (im wesentlichen) beste bewiesene Ergebnis bis heute ist

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leq C \, \frac{x}{\exp(c(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5})}$$

von Ivan Matveyevich Vinogradov (1891–1983)
und N. M. Korobov (?–?)

Bestes Ergebnis zur Riemannschen Vermutung derzeit

Das (im wesentlichen) beste bewiesene Ergebnis bis heute ist

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leq C\,\frac{x}{\exp(c(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5})}$$

von Ivan Matveyevich Vinogradov (1891–1983)
und N. M. Korobov (?–?)

Dieses Ergebnis aus dem Jahr 1958 konnte bis heute nicht wesentlich verbessert werden!

Zur Verteilung der Primzahlen

Primzahlzwillinge

Neue Fortschritte bei kleinen Primzahllücken

Primzahlzwillinge

Primzahlzwillinge: Primzahlpaare mit Abstand 2,
z.B. $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$, ...

Primzahlzwillinge

Primzahlzwillinge: Primzahlpaare mit Abstand 2,
z.B. $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$,...

Zwillingsvermutung: Es gibt unendlich viele Primzahlpaare $p, p + 2 \in \mathbb{P}$.

Primzahlzwillinge

Primzahlzwillinge: Primzahlpaare mit Abstand 2,
z.B. $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$, ...

Zwillingsvermutung: Es gibt unendlich viele Primzahlpaare $p, p + 2 \in \mathbb{P}$.

Zwillingsvermutung von Alphonse de Polignac (1826–1863) aus dem Jahr 1849:

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es unendlich viele Primzahlpaare $p, p + 2k \in \mathbb{P}$.

Animation des Zwillingssiebs

~~001~~	003	005	007	009	011	013	015	017	019
021	023	025	027	029	031	033	035	037	039
041	043	045	047	049	051	053	055	057	059
061	063	065	057	069	071	073	075	077	079
081	083	085	067	089	091	093	095	097	099
101	103	105	107	109	111	113	115	117	119
121	123	125	127	129	131	133	135	137	139
141	143	145	147	149	151	153	155	157	159
161	163	165	167	169	171	173	175	177	179
181	183	185	187	189	191	193	195	197	199

Animation des Zwillingssiebs

~~001~~	~~003~~	005	~~007~~	~~009~~	011	~~013~~	~~015~~	017	~~019~~
~~021~~	023	~~025~~	~~027~~	029	~~031~~	~~033~~	035	~~037~~	~~039~~
041	~~043~~	~~045~~	047	~~049~~	~~051~~	053	~~055~~	~~057~~	059
~~061~~	~~063~~	065	~~067~~	~~069~~	071	~~073~~	~~075~~	077	~~079~~
~~081~~	083	~~085~~	~~087~~	089	~~091~~	~~093~~	095	~~097~~	~~099~~
101	~~103~~	~~105~~	107	~~109~~	~~111~~	113	~~115~~	~~117~~	119
~~121~~	~~123~~	125	~~127~~	~~129~~	131	~~133~~	~~135~~	137	~~139~~
~~141~~	143	~~145~~	~~147~~	149	~~151~~	~~153~~	155	~~157~~	~~159~~
161	~~163~~	~~165~~	167	~~169~~	~~171~~	173	~~175~~	~~177~~	179
~~181~~	~~183~~	185	~~187~~	~~189~~	191	~~193~~	~~195~~	197	~~199~~

Streiche alle n, für die n <u>oder</u> $n+2$ durch 3 teilbar ist.

Animation des Zwillingssiebs

~~001~~	~~003~~	~~005~~	~~007~~	~~009~~	011	~~013~~	~~015~~	017	~~019~~
~~021~~	~~023~~	~~025~~	~~027~~	029	~~031~~	~~033~~	~~035~~	~~037~~	~~039~~
041	~~043~~	~~045~~	047	~~049~~	~~051~~	~~053~~	~~055~~	~~057~~	059
~~061~~	~~063~~	~~065~~	~~067~~	~~069~~	071	~~073~~	~~075~~	077	~~079~~
~~081~~	~~083~~	~~085~~	~~087~~	089	~~091~~	~~093~~	~~095~~	~~097~~	~~099~~
101	~~103~~	~~105~~	107	~~109~~	~~111~~	~~113~~	~~115~~	~~117~~	119
~~121~~	~~123~~	~~125~~	~~127~~	~~129~~	131	~~133~~	~~135~~	137	~~139~~
~~141~~	~~143~~	~~145~~	~~147~~	149	~~151~~	~~153~~	~~155~~	~~157~~	~~159~~
161	~~163~~	~~165~~	167	~~169~~	~~171~~	~~173~~	~~175~~	~~177~~	179
~~181~~	~~183~~	~~185~~	~~187~~	~~189~~	191	~~193~~	~~195~~	197	~~199~~

Streiche alle n, für die n oder $n+2$ durch 5 teilbar ist.

Animation des Zwillingssiebs

~~001~~	~~003~~	~~005~~	~~007~~	~~009~~	011	~~013~~	~~015~~	017	~~019~~
~~021~~	~~023~~	~~025~~	~~027~~	029	~~031~~	~~033~~	~~035~~	~~037~~	~~039~~
041	~~043~~	~~045~~	~~047~~	~~049~~	~~051~~	~~053~~	~~055~~	~~057~~	059
~~061~~	~~063~~	~~065~~	~~067~~	~~069~~	071	~~073~~	~~075~~	~~077~~	~~079~~
~~081~~	~~083~~	~~085~~	~~087~~	~~089~~	~~091~~	~~093~~	~~095~~	~~097~~	~~099~~
101	~~103~~	~~105~~	107	~~109~~	~~111~~	~~113~~	~~115~~	~~117~~	~~119~~
~~121~~	~~123~~	~~125~~	~~127~~	~~129~~	~~131~~	~~133~~	~~135~~	137	~~139~~
~~141~~	~~143~~	~~145~~	~~147~~	149	~~151~~	~~153~~	~~155~~	~~157~~	~~159~~
~~161~~	~~163~~	~~165~~	167	~~169~~	~~171~~	~~173~~	~~175~~	~~177~~	179
~~181~~	~~183~~	~~185~~	~~187~~	~~189~~	191	~~193~~	~~195~~	197	~~199~~

Streiche alle n, für die n <u>oder</u> $n+2$ durch 7 teilbar ist.

Animation des Zwillingssiebs

~~001~~	~~003~~	~~005~~	~~007~~	~~009~~	~~011~~	~~013~~	~~015~~	017	~~019~~
~~021~~	~~023~~	~~025~~	~~027~~	029	~~031~~	~~033~~	~~035~~	~~037~~	~~039~~
041	~~043~~	~~045~~	~~047~~	~~049~~	~~051~~	~~053~~	~~055~~	~~057~~	059
~~061~~	~~063~~	~~065~~	~~067~~	~~069~~	071	~~073~~	~~075~~	~~077~~	~~079~~
~~081~~	~~083~~	~~085~~	~~087~~	~~089~~	~~091~~	~~093~~	~~095~~	~~097~~	~~099~~
101	~~103~~	~~105~~	107	~~109~~	~~111~~	~~113~~	~~115~~	~~117~~	~~119~~
~~121~~	~~123~~	~~125~~	~~127~~	~~129~~	~~131~~	~~133~~	~~135~~	137	~~139~~
~~141~~	~~143~~	~~145~~	~~147~~	149	~~151~~	~~153~~	~~155~~	~~157~~	~~159~~
~~161~~	~~163~~	~~165~~	167	~~169~~	~~171~~	~~173~~	~~175~~	~~177~~	179
~~181~~	~~183~~	~~185~~	~~187~~	~~189~~	191	~~193~~	~~195~~	197	~~199~~

Streiche alle n, für die n oder $n+2$ durch 11 teilbar ist.

Animation des Zwillingssiebs

~~001~~	~~003~~	~~005~~	~~007~~	~~009~~	~~011~~	~~013~~	~~015~~	017	~~019~~
~~021~~	~~023~~	~~025~~	~~027~~	029	~~031~~	~~033~~	~~035~~	~~037~~	~~039~~
041	~~043~~	~~045~~	~~047~~	~~049~~	~~051~~	~~053~~	~~055~~	~~057~~	059
~~061~~	~~063~~	~~065~~	~~067~~	~~069~~	071	~~073~~	~~075~~	~~077~~	~~079~~
~~081~~	~~083~~	~~085~~	~~087~~	~~089~~	~~091~~	~~093~~	~~095~~	~~097~~	~~099~~
101	~~103~~	~~105~~	107	~~109~~	~~111~~	~~113~~	~~115~~	~~117~~	~~119~~
~~121~~	~~123~~	~~125~~	~~127~~	~~129~~	~~131~~	~~133~~	~~135~~	137	~~139~~
~~141~~	~~143~~	~~145~~	~~147~~	149	~~151~~	~~153~~	~~155~~	~~157~~	~~159~~
~~161~~	~~163~~	~~165~~	~~167~~	~~169~~	~~171~~	~~173~~	~~175~~	~~177~~	179
~~181~~	~~183~~	~~185~~	~~187~~	~~189~~	191	~~193~~	~~195~~	197	~~199~~

Streiche alle n, für die n oder $n+2$ durch 13 teilbar ist.

Animation des Zwillingssiebs

~~001~~	~~003~~	~~005~~	~~007~~	~~009~~	~~011~~	~~013~~	~~015~~	017	~~019~~
~~021~~	~~023~~	~~025~~	~~027~~	029	~~031~~	~~033~~	~~035~~	~~037~~	~~039~~
041	~~043~~	~~045~~	~~047~~	~~049~~	~~051~~	~~053~~	~~055~~	~~057~~	059
~~061~~	~~063~~	~~065~~	~~067~~	~~069~~	071	~~073~~	~~075~~	~~077~~	~~079~~
~~081~~	~~083~~	~~085~~	~~087~~	~~089~~	~~091~~	~~093~~	~~095~~	~~097~~	~~099~~
101	~~103~~	~~105~~	107	~~109~~	~~111~~	~~113~~	~~115~~	~~117~~	~~119~~
~~121~~	~~123~~	~~125~~	~~127~~	~~129~~	~~131~~	~~133~~	~~135~~	137	~~139~~
~~141~~	~~143~~	~~145~~	~~147~~	149	~~151~~	~~153~~	~~155~~	~~157~~	~~159~~
~~161~~	~~163~~	~~165~~	~~167~~	~~169~~	~~171~~	~~173~~	~~175~~	~~177~~	179
~~181~~	~~183~~	~~185~~	~~187~~	~~189~~	191	~~193~~	~~195~~	197	~~199~~

Ergebnis: Alle $14 < p < 200$ prim, für die $p + 2$ auch prim ist.

Viggo Brun

Bilder/BrunBild.png

Viggo Brun, 1885–1978

Viggo Brun

Bilder/BrunBild.png

Viggo Brun, 1885–1978

Brun zeigte (um 1920) mithilfe von Siebtheorie:

$$\pi_2(x) \leq C \frac{x}{\log^2 x}$$

Viggo Brun

Bilder/BrunBild.png

Viggo Brun, 1885–1978

Brun zeigte (um 1920) mithilfe von Siebtheorie:

$$\pi_2(x) \leq C \frac{x}{\log^2 x}$$

Korollar: $\displaystyle\sum_{p, p+2 \in \mathbb{P}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2} \right)$ $\approx 1.9021605822\ldots$ (Brunsche Konstante) konvergiert.

Viggo Brun

Bilder/BrunBild.png

Viggo Brun, 1885–1978

Brun zeigte (um 1920) mithilfe von Siebtheorie:

$$\pi_2(x) \leq C \frac{x}{\log^2 x}$$

Korollar: $\displaystyle\sum_{p,p+2\in\mathbb{P}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right)$ $\approx 1.9021605822\ldots$ (Brunsche Konstante) konvergiert.

Damit bleibt unentschieden, ob es nun endlich oder unendlich viele Primzahlzwillinge gibt ("Brunscher Witz").

Viggo Brun

Bilder/BrunBild.png

Viggo Brun, 1885–1978

Brun zeigte (um 1920) mithilfe von Siebtheorie:

$$\pi_2(x) \leq C \frac{x}{\log^2 x}$$

Korollar: $\displaystyle\sum_{p,p+2\in\mathbb{P}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right)$

$\approx 1.9021605822\ldots$ (Brunsche Konstante) konvergiert.

Damit bleibt unentschieden, ob es nun endlich oder unendlich viele Primzahlzwillinge gibt ("Brunscher Witz").

Geburtsstunde der modernen Siebtheorie

Numerische Berechnung der Brunschen Konstanten

Thomas R. Nicely (Lynchburg College, USA) versuchte um 1994 eine genaue numerische Berechnung der Brunschen Konstante.

Numerische Berechnung der Brunschen Konstanten

Thomas R. Nicely (Lynchburg College, USA) versuchte um 1994 eine genaue numerische Berechnung der Brunschen Konstante. Er machte eine bemerkenswerte Entdeckung:

Numerische Berechnung der Brunschen Konstanten

Thomas R. Nicely (Lynchburg College, USA) versuchte um 1994 eine genaue numerische Berechnung der Brunschen Konstante.
Er machte eine bemerkenswerte Entdeckung:

Bilder/Pentiumkl.png

Pentium 66 (SX837) mit FDIV-Bug

Den Pentium-FDIV-Bug: Einen Hardwarefehler des Pentium-Prozessors von Intel, anderthalb Jahre nach Markteinführung, der für fehlerhafte Nachkommastellen in Anwendungen sorgte, bei denen hohe Genauigkeit erforderlich ist.

Numerische Berechnung der Brunschen Konstanten

Thomas R. Nicely (Lynchburg College, USA) versuchte um 1994 eine genaue numerische Berechnung der Brunschen Konstante. Er machte eine bemerkenswerte Entdeckung:

Bilder/Pentiumkl.png

Pentium 66 (SX837) mit FDIV-Bug

Den Pentium-FDIV-Bug: Einen Hardwarefehler des Pentium-Prozessors von Intel, anderthalb Jahre nach Markteinführung, der für fehlerhafte Nachkommastellen in Anwendungen sorgte, bei denen hohe Genauigkeit erforderlich ist.

Allein der Umtausch von ca. einer Million fehlerhafter Prozessoren hat die Herstellerfirma Intel über 475 Millionen Dollar gekostet.

Numerische Berechnung der Brunschen Konstanten

Thomas R. Nicely (Lynchburg College, USA) versuchte um 1994 eine genaue numerische Berechnung der Brunschen Konstante. Er machte eine bemerkenswerte Entdeckung:

Bilder/Pentiumkl.png

Pentium 66 (SX837) mit FDIV-Bug

Den Pentium-FDIV-Bug: Einen Hardwarefehler des Pentium-Prozessors von Intel, anderthalb Jahre nach Markteinführung, der für fehlerhafte Nachkommastellen in Anwendungen sorgte, bei denen hohe Genauigkeit erforderlich ist.

Allein der Umtausch von ca. einer Million fehlerhafter Prozessoren hat die Herstellerfirma Intel über 475 Millionen Dollar gekostet. Intel erntete viel Schadenfreude: “Wieviele Intel-Mitarbeiter braucht man, um eine Glühbirne zu wechseln? 1,9999983256”

Zur Verteilung der Primzahlen

Primzahlzwillinge

Neue Fortschritte bei kleinen Primzahllücken

Kleine Primzahllücken

Ansatz zur Zwillingsvermutung: Zähle "kleine Primzahllücken"

Kleine Primzahllücken

Ansatz zur Zwillingsvermutung: Zähle "kleine Primzahllücken"

Betrachte die unendliche Folge der Primzahlen:

$$\underbrace{2}_{p_1} < \underbrace{3}_{p_2} < \underbrace{5}_{p_3} < \underbrace{7}_{p_4} < \underbrace{11}_{p_5} < \dots$$

Kleine Primzahllücken

Ansatz zur Zwillingsvermutung: Zähle “kleine Primzahllücken”

Betrachte die unendliche Folge der Primzahlen:

$$\underbrace{2}_{p_1} < \underbrace{3}_{p_2} < \underbrace{5}_{p_3} < \underbrace{7}_{p_4} < \underbrace{11}_{p_5} < \dots$$

Eine *Primzahllücke* ist eine Differenz $p_{n+1} - p_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Kleine Primzahllücken

Ansatz zur Zwillingsvermutung: Zähle “kleine Primzahllücken”

Betrachte die unendliche Folge der Primzahlen:

$$\underbrace{2}_{p_1} < \underbrace{3}_{p_2} < \underbrace{5}_{p_3} < \underbrace{7}_{p_4} < \underbrace{11}_{p_5} < \dots$$

Eine *Primzahllücke* ist eine Differenz $p_{n+1} - p_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wie klein ist die kleinste Primzahllücke, die nachweislich unendlich oft vorkommt, d. h. wie kann

$$\liminf_{n\to\infty} (p_{n+1} - p_n)$$

nach oben abgeschätzt werden?

Kleine Primzahllücken

Ansatz zur Zwillingsvermutung: Zähle "kleine Primzahllücken"

Betrachte die unendliche Folge der Primzahlen:

$$\underbrace{2}_{p_1} < \underbrace{3}_{p_2} < \underbrace{5}_{p_3} < \underbrace{7}_{p_4} < \underbrace{11}_{p_5} < \dots$$

Eine *Primzahllücke* ist eine Differenz $p_{n+1} - p_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wie klein ist die kleinste Primzahllücke, die nachweislich unendlich oft vorkommt, d. h. wie kann

$$\liminf_{n\to\infty} (p_{n+1} - p_n)$$

nach oben abgeschätzt werden?

Die Zwillingsvermutung ist genau die Aussage, dass dieser Wert $= 2$ ist.

Der Durchbruch von GPY im Jahr 2005

Laut Primzahlsatz beträgt die Differenz $p_{n+1} - p_n$ *im Mittel* etwa $\log p_n$.

Der Durchbruch von GPY im Jahr 2005

Laut Primzahlsatz beträgt die Differenz $p_{n+1} - p_n$ *im Mittel* etwa $\log p_n$. Tatsächlich ist diese unendlich oft kleiner:

`Bilder/GPY.png`

v.r.n.l.: D. Goldston, J. Pintz, C. Yıldırım (GPY 2005)

Der Durchbruch von GPY im Jahr 2005

Laut Primzahlsatz beträgt die Differenz $p_{n+1} - p_n$ *im Mittel* etwa $\log p_n$. Tatsächlich ist diese unendlich oft kleiner:

`Bilder/GPY.png`

v.r.n.l.: D. Goldston, J. Pintz, C. Yıldırım (GPY 2005)

Beweis der *"small gap conjecture"*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} = 0$$

(sogar unendlich oft kleiner als $\sqrt{\log p_n}(\log\log p_n)^2$)

Der Durchbruch von GPY im Jahr 2005

Laut Primzahlsatz beträgt die Differenz $p_{n+1} - p_n$ *im Mittel* etwa $\log p_n$. Tatsächlich ist diese unendlich oft kleiner:

Bilder/GPY.png

v.r.n.l.: D. Goldston, J. Pintz, C. Yıldırım (GPY 2005)

Beweis der *"small gap conjecture"*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} = 0$$

(sogar unendlich oft kleiner als $\sqrt{\log p_n}(\log\log p_n)^2$)

Beweis der *"bounded gap conjecture"* unter Annahme der Elliott–Halberstam-Vermutung (noch weitreichender als die Riemannsche Vermutung):

$$\liminf_{n\to\infty} (p_{n+1} - p_n) \leq 16$$

Der Durchbruch im Mai 2013

Bilder/Zhang.png

Y. Zhang

Am 14. Mai 2013 wurde bekannt, dass Y. Zhang die „bounded gap conjecture“ gelöst hat:

Der Durchbruch im Mai 2013

Bilder/Zhang.png

Y. Zhang

Am 14. Mai 2013 wurde bekannt, dass Y. Zhang die „bounded gap conjecture“ gelöst hat:

Er wies die Existenz einer Konstanten $H > 0$ nach, für die

$$\liminf_{n \to \infty} (p_{n+1} - p_n) \leq H$$

gilt, ganz ohne Annahme einer unbewiesenen Vermutung.

Der Durchbruch im Mai 2013

Bilder/Zhang.png

Y. Zhang

Am 14. Mai 2013 wurde bekannt, dass Y. Zhang die „bounded gap conjecture“ gelöst hat:

Er wies die Existenz einer Konstanten $H > 0$ nach, für die

$$\liminf_{n\to\infty} (p_{n+1} - p_n) \leq H$$

gilt, ganz ohne Annahme einer unbewiesenen Vermutung.

In seinem Beweis leitet er für die Zwillingslückenschranke H den numerischen Wert $H = 70.000.000$ her.

Über Yitang Zhang

Y. Zhang studierte 1978 bis Mitte der 1980er in Beijing.

Über Yitang Zhang

Y. Zhang studierte 1978 bis Mitte der 1980er in Beijing.
Er promovierte 1992 in Purdue.

Über Yitang Zhang

Y. Zhang studierte 1978 bis Mitte der 1980er in Beijing.

Er promovierte 1992 in Purdue.

Er fand im Anschluss keine akademische Anstellung, arbeitete daraufhin in diversen Jobs, u. a. in einem Sandwich-Shop von Subway, einem Motel, als Bote für einen Liefer-Service.

Über Yitang Zhang

Y. Zhang studierte 1978 bis Mitte der 1980er in Beijing.
Er promovierte 1992 in Purdue.
Er fand im Anschluss keine akademische Anstellung, arbeitete daraufhin in diversen Jobs, u. a. in einem Sandwich-Shop von Subway, einem Motel, als Bote für einen Liefer-Service.

1999 fand er eine Lecturer-Stelle an der University of New Hampshire.

Über Yitang Zhang

Y. Zhang studierte 1978 bis Mitte der 1980er in Beijing.
Er promovierte 1992 in Purdue.
Er fand im Anschluss keine akademische Anstellung, arbeitete daraufhin in diversen Jobs, u. a. in einem Sandwich-Shop von Subway, einem Motel, als Bote für einen Liefer-Service.

1999 fand er eine Lecturer-Stelle an der University of New Hampshire.
Er entwickelte ausgefeilte, tiefe Resultate und hatte wichtige Schlüsselideen, die Experten entgangen waren.

Über Yitang Zhang

Y. Zhang studierte 1978 bis Mitte der 1980er in Beijing.
Er promovierte 1992 in Purdue.
Er fand im Anschluss keine akademische Anstellung, arbeitete daraufhin in diversen Jobs, u. a. in einem Sandwich-Shop von Subway, einem Motel, als Bote für einen Liefer-Service.

1999 fand er eine Lecturer-Stelle an der University of New Hampshire.
Er entwickelte ausgefeilte, tiefe Resultate und hatte wichtige Schlüsselideen, die Experten entgangen waren.
Seine Arbeit schrieb Zhang so, dass sie nicht gleich abgelehnt werden konnte. Er war zu dem Zeitpunkt 57 Jahre alt.

Über Yitang Zhang

Y. Zhang studierte 1978 bis Mitte der 1980er in Beijing.
Er promovierte 1992 in Purdue.
Er fand im Anschluss keine akademische Anstellung, arbeitete daraufhin in diversen Jobs, u. a. in einem Sandwich-Shop von Subway, einem Motel, als Bote für einen Liefer-Service.

1999 fand er eine Lecturer-Stelle an der University of New Hampshire.
Er entwickelte ausgefeilte, tiefe Resultate und hatte wichtige Schlüsselideen, die Experten entgangen waren.
Seine Arbeit schrieb Zhang so, dass sie nicht gleich abgelehnt werden konnte. Er war zu dem Zeitpunkt 57 Jahre alt.

Die Geschichte über Zhang fand ein gewaltiges Medien-Echo, u. a. berichtete am 21. Mai 2013 die New York Times über ihn.

Über Yitang Zhang

Y. Zhang studierte 1978 bis Mitte der 1980er in Beijing.
Er promovierte 1992 in Purdue.
Er fand im Anschluss keine akademische Anstellung, arbeitete daraufhin in diversen Jobs, u. a. in einem Sandwich-Shop von Subway, einem Motel, als Bote für einen Liefer-Service.

1999 fand er eine Lecturer-Stelle an der University of New Hampshire.
Er entwickelte ausgefeilte, tiefe Resultate und hatte wichtige Schlüsselideen, die Experten entgangen waren.
Seine Arbeit schrieb Zhang so, dass sie nicht gleich abgelehnt werden konnte. Er war zu dem Zeitpunkt 57 Jahre alt.

Die Geschichte über Zhang fand ein gewaltiges Medien-Echo, u. a. berichtete am 21. Mai 2013 die New York Times über ihn.
Zhang erhielt viele Preise für seinen Durchbruch. Heute ist er Professor an seiner Universität in New Hampshire.

Das Polymath-Projekt von Terence Tao

Von T. Tao wurde daraufhin ein Internet-Projekt namens Polymath 8 initiiert, das mehreren Autoren die gemeinsame numerische Verbesserung der Schranke H erlaubte.

Das Polymath-Projekt von Terence Tao

Von T. Tao wurde daraufhin ein Internet-Projekt namens Polymath 8 initiiert, das mehreren Autoren die gemeinsame numerische Verbesserung der Schranke H erlaubte.

Auf der Internet-Webseite des Projekts kann die Entwicklung abgerufen werden. Eine Auswahl:

Datum	Autor	H
14. Mai 2013	Zhang	70.000.000
3. Juni 2013	Tao	285.456
16. Juni 2013	Sutherland	60.744
5. Juli 2013	Engelsma	5.414

Das Polymath-Projekt von Terence Tao

Von T. Tao wurde daraufhin ein Internet-Projekt namens Polymath 8 initiiert, das mehreren Autoren die gemeinsame numerische Verbesserung der Schranke H erlaubte.

Auf der Internet-Webseite des Projekts kann die Entwicklung abgerufen werden. Eine Auswahl:

Datum	Autor	H
14. Mai 2013	Zhang	70.000.000
3. Juni 2013	Tao	285.456
16. Juni 2013	Sutherland	60.744
5. Juli 2013	Engelsma	5.414

Das Projekt wurde mit $H = 4.680$ abgeschlossen.
Dabei wurden einige Vereinfachungen in Zhangs Beweis erzielt.

Über Terence Tao

Bilder/Tao.png

Terence Tao

Terence Tao gehört zu den bekanntesten lebenden Mathematikern überhaupt.

Über Terence Tao

Bilder/Tao.png

Terence Tao

Terence Tao gehört zu den bekanntesten lebenden Mathematikern überhaupt.
Im Alter von 9 Jahren hörte er bereits Mathematik-Vorlesungen auf Universitätsniveau und gewann bei der IMO insgesamt 3 Medaillen im Alter von jeweils 10, 11 und 12 Jahren.
Mit 24 Jahren wird er Professor an der University of California, Los Angeles.

Über Terence Tao

Bilder/Tao.png

Terence Tao

Terence Tao gehört zu den bekanntesten lebenden Mathematikern überhaupt.
Im Alter von 9 Jahren hörte er bereits Mathematik-Vorlesungen auf Universitätsniveau und gewann bei der IMO insgesamt 3 Medaillen im Alter von jeweils 10, 11 und 12 Jahren.
Mit 24 Jahren wird er Professor an der University of California, Los Angeles.

Er gewann zahlreiche Preise, u. a. die Fieldsmedaille im Jahr 2006 (insbesondere für den Satz von Green–Tao), als er 31 Jahre alt war.

Über Terence Tao

Bilder/Tao.png

Terence Tao

Terence Tao gehört zu den bekanntesten lebenden Mathematikern überhaupt.
Im Alter von 9 Jahren hörte er bereits Mathematik-Vorlesungen auf Universitätsniveau und gewann bei der IMO insgesamt 3 Medaillen im Alter von jeweils 10, 11 und 12 Jahren.
Mit 24 Jahren wird er Professor an der University of California, Los Angeles.

Er gewann zahlreiche Preise, u. a. die Fieldsmedaille im Jahr 2006 (insbesondere für den Satz von Green–Tao), als er 31 Jahre alt war.
Viele populäre Medien berichteten über ihn, u. a. die New York Times, CNN, USA Today, Popular Science, usw.

Über Terence Tao

Bilder/Tao.png

Terence Tao

Terence Tao gehört zu den bekanntesten lebenden Mathematikern überhaupt.
Im Alter von 9 Jahren hörte er bereits Mathematik-Vorlesungen auf Universitätsniveau und gewann bei der IMO insgesamt 3 Medaillen im Alter von jeweils 10, 11 und 12 Jahren.
Mit 24 Jahren wird er Professor an der University of California, Los Angeles.

Er gewann zahlreiche Preise, u. a. die Fieldsmedaille im Jahr 2006 (insbesondere für den Satz von Green–Tao), als er 31 Jahre alt war. Viele populäre Medien berichteten über ihn, u. a. die New York Times, CNN, USA Today, Popular Science, usw. 2014 gewann er den Breakthrough Prize in Mathematics, gegründet von Yuri Milner und Mark Zuckerberg (Preisgeld: 3 Millionen US-Dollar).

Ein Bild von Terence Tao mit Paul Erdős

Bilder/Paul_Erdos_with_Terence_Tao.png

Terence Tao mit Paul Erdős

Hier ein Bild mit Terence Tao und Paul Erdős aus dem Jahr 1985. Terence Tao ist 10 Jahre alt, Paul Erdős ist 72 Jahre alt.

Ein Bild von Terence Tao mit Paul Erdős

Bilder/Paul_Erdos_with_Terence_Tao.png

Terence Tao mit Paul Erdős

Hier ein Bild mit Terence Tao und Paul Erdős aus dem Jahr 1985. Terence Tao ist 10 Jahre alt, Paul Erdős ist 72 Jahre alt.

Paul Erdős (1913–1996) war einer der profiliertesten Mathematiker des 20. Jahrhunderts. Er war bekannt für

Ein Bild von Terence Tao mit Paul Erdős

Bilder/Paul_Erdos_with_Terence_Tao.png

Terence Tao mit Paul Erdős

Hier ein Bild mit Terence Tao und Paul Erdős aus dem Jahr 1985. Terence Tao ist 10 Jahre alt, Paul Erdős ist 72 Jahre alt.

Paul Erdős (1913–1996) war einer der profiliertesten Mathematiker des 20. Jahrhunderts. Er war bekannt für

- seine Art, Mathematik mit vielen Co-Autoren zu betreiben (über 500 Co-Autoren),

Ein Bild von Terence Tao mit Paul Erdős

Bilder/Paul_Erdos_with_Terence_Tao.png

Terence Tao mit Paul Erdős

Hier ein Bild mit Terence Tao und Paul Erdős aus dem Jahr 1985. Terence Tao ist 10 Jahre alt, Paul Erdős ist 72 Jahre alt.

Paul Erdős (1913–1996) war einer der profiliertesten Mathematiker des 20. Jahrhunderts. Er war bekannt für

- seine Art, Mathematik mit vielen Co-Autoren zu betreiben (über 500 Co-Autoren),
- und seinen exzentrischen Lebensstil.

Ein Bild von Terence Tao mit Paul Erdős

Bilder/Paul_Erdos_with_Terence_Tao.png

Terence Tao mit Paul Erdős

Hier ein Bild mit Terence Tao und Paul Erdős aus dem Jahr 1985. Terence Tao ist 10 Jahre alt, Paul Erdős ist 72 Jahre alt.

Paul Erdős (1913–1996) war einer der profiliertesten Mathematiker des 20. Jahrhunderts. Er war bekannt für

- seine Art, Mathematik mit vielen Co-Autoren zu betreiben (über 500 Co-Autoren),
- und seinen exzentrischen Lebensstil.

Dokumentarfilm: *N* Is a Number: A Portrait of Paul Erdős

Der Durchbruch im November 2013

Im Oktober 2013 haben Terence Tao und James Maynard (unabhängig voneinander) eine Idee zur Verbesserung des GPY-Ansatzes, die die schwierigen Sätze von Zhang umgehen und numerisch überlegen ist.

Der Durchbruch im November 2013

Im Oktober 2013 haben Terence Tao und James Maynard (unabhängig voneinander) eine Idee zur Verbesserung des GPY-Ansatzes, die die schwierigen Sätze von Zhang umgehen und numerisch überlegen ist.

Bilder/Maynard.png

James Maynard

Am 19. November 2013 wurde von James Maynard (damals 26 Jahre alt) eine Arbeit bei arXiv veröffentlicht, in der er die Zwillingslückenschranke von Zhang auf $H = 600$ verbessert.

Der Durchbruch im November 2013

Im Oktober 2013 haben Terence Tao und James Maynard (unabhängig voneinander) eine Idee zur Verbesserung des GPY-Ansatzes, die die schwierigen Sätze von Zhang umgehen und numerisch überlegen ist.

`Bilder/Maynard.png`

James Maynard

Am 19. November 2013 wurde von James Maynard (damals 26 Jahre alt) eine Arbeit bei arXiv veröffentlicht, in der er die Zwillingslückenschranke von Zhang auf $H = 600$ verbessert.

James Maynard hatte 2009 in Oxford bei R. Heath-Brown promoviert und 2013–2014 in Montréal bei A. Granville geforscht.

Das Projekt Polymath 8b

Das Polymath-Projekt wurde am Tag der Veröffentlichung der Maynard-Arbeit von Terence Tao in die Projekte 8a (das bisherige, was nicht weiter verfolgt wird) und 8b aufgespalten.

Das Projekt Polymath 8b

Das Polymath-Projekt wurde am Tag der Veröffentlichung der Maynard-Arbeit von Terence Tao in die Projekte 8a (das bisherige, was nicht weiter verfolgt wird) und 8b aufgespalten.

Das neue Projekt 8b arbeitete an den weiteren Verbesserungen der Maynard-Methode. Mittlerweile ist so die Zwillingslückenschranke auf $H = 246$ gedrückt worden.

Das Projekt Polymath 8b

Das Polymath-Projekt wurde am Tag der Veröffentlichung der Maynard-Arbeit von Terence Tao in die Projekte 8a (das bisherige, was nicht weiter verfolgt wird) und 8b aufgespalten.

Das neue Projekt 8b arbeitete an den weiteren Verbesserungen der Maynard-Methode. Mittlerweile ist so die Zwillingslückenschranke auf $H = 246$ gedrückt worden.

Unter Annahme der (EH) zeigt die Maynard-Methode $H = 12$, und unter Annahme einer technischen Verallgemeinerung der (EH) kann diese sogar auf $H = 6$ gedrückt werden.

Das Projekt Polymath 8b

Das Polymath-Projekt wurde am Tag der Veröffentlichung der Maynard-Arbeit von Terence Tao in die Projekte 8a (das bisherige, was nicht weiter verfolgt wird) und 8b aufgespalten.

Das neue Projekt 8b arbeitete an den weiteren Verbesserungen der Maynard-Methode. Mittlerweile ist so die Zwillingslückenschranke auf $H = 246$ gedrückt worden.

Unter Annahme der (EH) zeigt die Maynard-Methode $H = 12$, und unter Annahme einer technischen Verallgemeinerung der (EH) kann diese sogar auf $H = 6$ gedrückt werden.

Diese Werte für H sind derzeit die theoretisch besten, die mit den neuen, aktuellen Methoden erreicht werden können.

opera de cribro

Die Mathematiker John Friedlander und Henryk Iwaniec waren die Gutachter für Zhang's Arbeit bei den Annals of Mathematics.

opera de cribro

Die Mathematiker John Friedlander und Henryk Iwaniec waren die Gutachter für Zhang's Arbeit bei den Annals of Mathematics.

Vor dem Zhang-Durchbruch hatten sie gerade ein neues, umfangreiches Siebtheorie-Buch mit dem Titel "opera de cribro" geschrieben. Kurz danach wollten sie eine Ergänzung in einer zweiten Auflage des Buches präsentieren.

opera de cribro

Die Mathematiker John Friedlander und Henryk Iwaniec waren die Gutachter für Zhang's Arbeit bei den Annals of Mathematics.

Vor dem Zhang-Durchbruch hatten sie gerade ein neues, umfangreiches Siebtheorie-Buch mit dem Titel "opera de cribro" geschrieben. Kurz danach wollten sie eine Ergänzung in einer zweiten Auflage des Buches präsentieren.

Diese Ergänzung war kurze Zeit später im November 2013 aufgrund der Tao/Maynard-Durchbrüche wieder eingeholt, weswegen sie doch nicht in dieser Form in die zweite Auflage des Buches kommt.

opera de cribro

Die Mathematiker John Friedlander und Henryk Iwaniec waren die Gutachter für Zhang's Arbeit bei den Annals of Mathematics.

Vor dem Zhang-Durchbruch hatten sie gerade ein neues, umfangreiches Siebtheorie-Buch mit dem Titel "opera de cribro" geschrieben. Kurz danach wollten sie eine Ergänzung in einer zweiten Auflage des Buches präsentieren.

Diese Ergänzung war kurze Zeit später im November 2013 aufgrund der Tao/Maynard-Durchbrüche wieder eingeholt, weswegen sie doch nicht in dieser Form in die zweite Auflage des Buches kommt.

Sie veröffentlichen die Ergänzung lediglich bei arXiv unter dem dem Titel

close encounters among the primes

Zukunft?

Zur Zeit sind keine weitere neue Verbesserungen zu erwarten, es sind wiederum grundlegend neue Ideen erforderlich. Die neuen Methoden von Zhang/Tao/Maynard konnten aber bereits gewinnbringend zur Lösung weiterer Probleme eingesetzt werden.

Zukunft?

Zur Zeit sind keine weitere neue Verbesserungen zu erwarten, es sind wiederum grundlegend neue Ideen erforderlich. Die neuen Methoden von Zhang/Tao/Maynard konnten aber bereits gewinnbringend zur Lösung weiterer Probleme eingesetzt werden.

Im August 2014 gab James Maynard auf arXiv bekannt, dass er das Erdős–Rankin-Problem für <u>große</u> Primzahllücken gelöst hatte. Erdős hatte seinerzeit einen Preis von 10000 US-Dollar für die Lösung des Problems ausgelobt.

Zukunft?

Zur Zeit sind keine weitere neue Verbesserungen zu erwarten, es sind wiederum grundlegend neue Ideen erforderlich. Die neuen Methoden von Zhang/Tao/Maynard konnten aber bereits gewinnbringend zur Lösung weiterer Probleme eingesetzt werden.

Im August 2014 gab James Maynard auf arXiv bekannt, dass er das Erdős–Rankin-Problem für große Primzahllücken gelöst hatte. Erdős hatte seinerzeit einen Preis von 10000 US-Dollar für die Lösung des Problems ausgelobt.

In derselben Woche veröffentlichten Ford, Green, Konyagin, und Tao einen anderen Beweis desselben Problems, aber ebenso wie Maynard mit einer neuen Variante der Tao/Maynard-Methode.

Zukunft?

Zur Zeit sind keine weitere neue Verbesserungen zu erwarten, es sind wiederum grundlegend neue Ideen erforderlich. Die neuen Methoden von Zhang/Tao/Maynard konnten aber bereits gewinnbringend zur Lösung weiterer Probleme eingesetzt werden.

Im August 2014 gab James Maynard auf arXiv bekannt, dass er das Erdős–Rankin-Problem für große Primzahllücken gelöst hatte. Erdős hatte seinerzeit einen Preis von 10000 US-Dollar für die Lösung des Problems ausgelobt.

In derselben Woche veröffentlichten Ford, Green, Konyagin, und Tao einen anderen Beweis desselben Problems, aber ebenso wie Maynard mit einer neuen Variante der Tao/Maynard-Methode.
Satz von Ford-Green-Konyagin-Maynard-Tao [2014]:

$$p_{n+1} - p_n \gg \frac{\log n \ \log\log n \ \log\log\log\log n}{\log\log\log n}$$

(für unendlich viele n)

Vielen Dank!