Große Fortschritte bei kleinen Primzahllücken

Ringvorlesung

PD Dr. Karin Halupczok

7. Mai 2014, Mathematisches Institut der WWU Münster

Die Verteilung der Primzahlen

Die Verteilung der Primzahlen in Restklassen

Primzahlzwillinge und Primzahllücken

Primzahlmuster

Neue Fortschritte bei kleinen Primzahllücken

Primzahlen

Die Zahlentheorie untersucht die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$: a teilt b, falls es ein $c \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b = ac$

Primzahlen

Die Zahlentheorie untersucht die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$: a teilt b, falls es ein $c \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b = ac$

Eine natürliche Zahl p heißt *prim* bzw. Primzahl, wenn sie genau zwei natürliche Teiler hat (nämlich 1 und p).

Primzahlen

Die Zahlentheorie untersucht die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$: a teilt b, falls es ein $c \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b = ac$

Eine natürliche Zahl p heißt *prim* bzw. Primzahl, wenn sie genau zwei natürliche Teiler hat (nämlich 1 und p).

Folge der Primzahlen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...
Sei $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der Primzahlen.

Primzahlen

Die Zahlentheorie untersucht die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$: a teilt b, falls es ein $c \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b = ac$

Eine natürliche Zahl p heißt *prim* bzw. Primzahl, wenn sie genau zwei natürliche Teiler hat (nämlich 1 und p).

Folge der Primzahlen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...
Sei $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der Primzahlen.

Satz von Euklid (ca. 300 v. Chr.):

Es existieren unendlich viele Primzahlen, d. h. $\#\mathbb{P} = \infty$.

Primzahlen

Die Zahlentheorie untersucht die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$: a teilt b, falls es ein $c \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b = ac$

Eine natürliche Zahl p heißt *prim* bzw. Primzahl, wenn sie genau zwei natürliche Teiler hat (nämlich 1 und p).

Folge der Primzahlen: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$
Sei $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der Primzahlen.

Satz von Euklid (ca. 300 v. Chr.):

Es existieren unendlich viele Primzahlen, d. h. $\#\mathbb{P} = \infty$.

Größte bekannte Primzahl aktuell: $2^{57.885.161} - 1$ mit 17.425.170 Stellen (seit 25.1.2013, Projekt GIMPS)

Der Fundamentalsatz der Arithmetik

Die Primzahlen sind die „Bausteine“ der natürlichen Zahlen:

Der Fundamentalsatz der Arithmetik

Die Primzahlen sind die „Bausteine“ der natürlichen Zahlen:

Der Fundamentalsatz der Arithmetik

Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist darstellbar als ein Produkt von Primzahlen. Bis auf die Reihenfolge der Faktoren ist diese Darstellung eindeutig.

Der Fundamentalsatz der Arithmetik

Die Primzahlen sind die „Bausteine“ der natürlichen Zahlen:

Der Fundamentalsatz der Arithmetik

Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist darstellbar als ein Produkt von Primzahlen. Bis auf die Reihenfolge der Faktoren ist diese Darstellung eindeutig.

Also: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>1}$ existieren (eindeutige Zahlen) $r \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}$ und $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}_0$ mit

$$n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}.$$

Der Fundamentalsatz der Arithmetik

Die Primzahlen sind die „Bausteine“ der natürlichen Zahlen:

Der Fundamentalsatz der Arithmetik

Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist darstellbar als ein Produkt von Primzahlen. Bis auf die Reihenfolge der Faktoren ist diese Darstellung eindeutig.

Also: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>1}$ existieren (eindeutige Zahlen) $r \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{P}$ und $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}_0$ mit

$$n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}.$$

Mit dem antiken Sieb des Eratosthenes können Primzahllisten erstellt werden, z. B. die Liste aller Primzahlen zwischen 10 und 100:

Animation des Siebes von Eratosthenes

~~01~~	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Animation des Siebes von Eratosthenes

~~01~~	~~02~~	03	~~04~~	05	~~06~~	07	~~08~~	09	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

Animation des Siebes von Eratosthenes

~~01~~	~~02~~	~~03~~	~~04~~	05	~~06~~	07	~~08~~	~~09~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Animation des Siebes von Eratosthenes

~~01~~	~~02~~	~~03~~	~~04~~	~~05~~	~~06~~	07	~~08~~	~~09~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Animation des Siebes von Eratosthenes

~~01~~	~~02~~	~~03~~	~~04~~	~~05~~	~~06~~	~~07~~	~~08~~	~~09~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Animation des Siebes von Eratosthenes

~~01~~	~~02~~	~~03~~	~~04~~	~~05~~	~~06~~	~~07~~	~~08~~	~~09~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Die Primzahlzählfunktion $\pi(x)$

Für reelle Zahlen $x > 1$ betrachten wir die Primzahlzählfunktion

$$\pi(x) := \#\{p \leq x;\ p \text{ prim}\},$$

also z. B. $\pi(3.5) = 2$, $\pi(12) = 5$ usw., sie stellt im Schaubild eine monoton steigende Stufenfunktion dar. Klar: $\pi(x) \leq x$.

Die Primzahlzählfunktion $\pi(x)$

Für reelle Zahlen $x > 1$ betrachten wir die Primzahlzählfunktion

$$\pi(x) := \#\{p \leq x;\ p \text{ prim}\},$$

also z. B. $\pi(3.5) = 2$, $\pi(12) = 5$ usw., sie stellt im Schaubild eine monoton steigende Stufenfunktion dar. Klar: $\pi(x) \leq x$.

Tschebytschev (1850): Es gibt Konstanten $c_2 > c_1 > 0$ mit

$$\frac{c_1 x}{\log x} \leq \pi(x) \leq \frac{c_2 x}{\log x},$$

z. B. $c_1 = 0.9$, $c_2 = 1.1$.

Die Primzahlzählfunktion $\pi(x)$

Für reelle Zahlen $x > 1$ betrachten wir die Primzahlzählfunktion

$$\pi(x) := \#\{p \le x;\ p \text{ prim}\},$$

also z. B. $\pi(3.5) = 2$, $\pi(12) = 5$ usw., sie stellt im Schaubild eine monoton steigende Stufenfunktion dar. Klar: $\pi(x) \le x$.

Tschebytschev (1850): Es gibt Konstanten $c_2 > c_1 > 0$ mit

$$\frac{c_1 x}{\log x} \le \pi(x) \le \frac{c_2 x}{\log x},$$

z. B. $c_1 = 0.9$, $c_2 = 1.1$.

Was sind gute obere und untere Schranken für $\pi(x)$?
Welche stetigen Funktionen in x beschreiben $\pi(x)$ am besten?

Die Vermutung von Gauß über $\pi(x)$

Vermutung von Gauß (1849): Das logarithmische Integral

$$\mathrm{li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \mathrm{O}\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

ist eine approximierende Funktion an $\pi(x)$, d. h. es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)} = 1.$$

Bemerkung: log ist hier der Logarithmus zur Basis e.

Die Vermutung von Gauß über $\pi(x)$

Vermutung von Gauß (1849): Das logarithmische Integral

$$\mathrm{li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \mathrm{O}\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

ist eine approximierende Funktion an $\pi(x)$, d. h. es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)} = 1.$$

Bemerkung: log ist hier der Logarithmus zur Basis e.

Nach dieser Vermutung von Gauß sind die Funktionen $\mathrm{li}(x)$ und $\frac{x}{\log x}$ beide Approximationen an $\pi(x)$.

Die Vermutung von Gauß über $\pi(x)$

Vermutung von Gauß (1849): Das logarithmische Integral

$$\mathrm{li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \mathrm{O}\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

ist eine approximierende Funktion an $\pi(x)$, d. h. es gilt

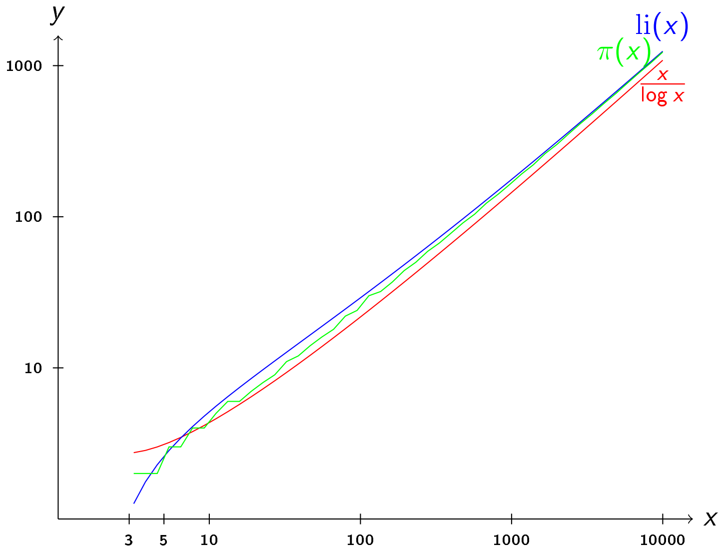
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)} = 1.$$

Bemerkung: log ist hier der Logarithmus zur Basis e.

Nach dieser Vermutung von Gauß sind die Funktionen $\mathrm{li}(x)$ und $\frac{x}{\log x}$ beide Approximationen an $\pi(x)$.

Darstellung der Funktionen $\pi(x)$, $\mathrm{li}(x)$ und $\frac{x}{\log x}$ im Schaubild:

Schaubild von $\pi(x)$, $\mathrm{li}(x)$ und $x/\log x$:



Der Primzahlsatz

Die numerischen Werte geben Gauß recht, zu seiner Zeit war aber noch kein Beweis für dieses asymptotische Verhalten von $\pi(x)$ in Sicht.

Der Primzahlsatz

Die numerischen Werte geben Gauß recht, zu seiner Zeit war aber noch kein Beweis für dieses asymptotische Verhalten von $\pi(x)$ in Sicht.
Hadamard und de la Vallée–Poussin (1896): Beweis der Gaußschen Vermutung, heute bekannt als:

Primzahlsatz:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)} = 1.}$$

Der Primzahlsatz

Die numerischen Werte geben Gauß recht, zu seiner Zeit war aber noch kein Beweis für dieses asymptotische Verhalten von $\pi(x)$ in Sicht.

Hadamard und de la Vallée–Poussin (1896): Beweis der Gaußschen Vermutung, heute bekannt als:

Primzahlsatz:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\operatorname{li}(x)} = 1.}$$

Dieser Satz kann auch umformuliert werden als $\pi(x) = \operatorname{li}(x) + \mathrm{o}(\operatorname{li}(x))$, wobei $\mathrm{o}(\operatorname{li}(x))$ einen Fehlerterm bezeichnet, der langsamer wächst als $\operatorname{li}(x)$, genau: $\mathrm{o}(\operatorname{li}(x))/\operatorname{li}(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

Der Primzahlsatz

Die numerischen Werte geben Gauß recht, zu seiner Zeit war aber noch kein Beweis für dieses asymptotische Verhalten von $\pi(x)$ in Sicht.
Hadamard und de la Vallée–Poussin (1896): Beweis der Gaußschen Vermutung, heute bekannt als:

Primzahlsatz:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)} = 1.}$$

Dieser Satz kann auch umformuliert werden als
$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathrm{o}(\mathrm{li}(x))$, wobei $\mathrm{o}(\mathrm{li}(x))$ einen Fehlerterm bezeichnet, der langsamer wächst als $\mathrm{li}(x)$, genau: $\mathrm{o}(\mathrm{li}(x))/\,\mathrm{li}(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Da $\mathrm{li}(x)$ und $\frac{x}{\log x}$ Approximationen voneinander sind, kann man den Primzahlsatz auch als $\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \mathrm{o}(\frac{x}{\log x})$ schreiben.

Die Riemannsche Vermutung (RH)

Wie gut ist die Approximation von $\pi(x)$ an $\mathrm{li}(x)$?
Das (im wesentlichen) beste bewiesene Ergebnis bis heute ist

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathrm{O}\left(\frac{x}{\exp(c(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5})}\right)$$

von Vinogradov und Korobov (1958).

Die Riemannsche Vermutung (RH)

Wie gut ist die Approximation von $\pi(x)$ an $\mathrm{li}(x)$?
Das (im wesentlichen) beste bewiesene Ergebnis bis heute ist

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathrm{O}\left(\frac{x}{\exp(c(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5})}\right)$$

von Vinogradov und Korobov (1958).
Bekannt ist: Ist der Fehlerterm $\mathrm{O}(\sqrt{x}\log x)$, so gilt die (bislang unbewiesene) Riemannsche Vermutung, und umgekehrt! (Beweis mit der „expliziten Formel".) Also:

Riemannsche Vermutung (RH), arithmetische Formulierung:

$$\mathrm{RH} \iff \pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathrm{O}(x^{1/2}\log x)$$

Die Riemannsche Vermutung (RH)

Wie gut ist die Approximation von $\pi(x)$ an $\mathrm{li}(x)$?
Das (im wesentlichen) beste bewiesene Ergebnis bis heute ist

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathrm{O}\left(\frac{x}{\exp(c(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5})}\right)$$

von Vinogradov und Korobov (1958).
Bekannt ist: Ist der Fehlerterm $\mathrm{O}(\sqrt{x}\log x)$, so gilt die (bislang unbewiesene) Riemannsche Vermutung, und umgekehrt! (Beweis mit der „expliziten Formel“.) Also:

Riemannsche Vermutung (RH), arithmetische Formulierung:

$$\mathrm{RH} \iff \pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathrm{O}(x^{1/2}\log x)$$

Riemannsche Vermutung (RH), analytische Formulierung:

Alle Nullstellen der Funktion $\zeta : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ im Streifen $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$ liegen auf der Geraden $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$.

Die Verteilung der Primzahlen

Die Verteilung der Primzahlen in Restklassen

Primzahlzwillinge und Primzahllücken

Primzahlmuster

Neue Fortschritte bei kleinen Primzahllücken

Primzahlen in Restklassen

Primzahlen in Restklassen

Dirichlet (1837): Zu gegebenen teilerfremden Zahlen a und q gibt es unendlich viele Primzahlen $\equiv a \bmod q$.

- Arithmetische Progression (AP): Folge $a, a+q, a+2q, \ldots$
- endliche AP: $\{a + nq \;:\; n \in \mathbb{N}_0, n \leq x\}$ für $a, q \in \mathbb{N}$ und $x > 1$
- unendliche AP (Restklasse): $\{a + nq \;:\; n \in \mathbb{Z}\}$ für $a, q \in \mathbb{N}$

Primzahlen in Restklassen

Dirichlet (1837): Zu gegebenen teilerfremden Zahlen a und q gibt es unendlich viele Primzahlen $\equiv a \bmod q$.

- Arithmetische Progression (AP): Folge $a, a+q, a+2q, \ldots$
- endliche AP: $\{a+nq \ : \ n \in \mathbb{N}_0, n \leq x\}$ für $a, q \in \mathbb{N}$ und $x > 1$
- unendliche AP (Restklasse): $\{a+nq \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ für $a, q \in \mathbb{N}$

Zählfunktion für Primzahlen in Restklassen:
$\pi(x; q, a) := \#\{p \leq x : \ p \equiv a \bmod q\}$

Primzahlen in Restklassen

Dirichlet (1837): Zu gegebenen teilerfremden Zahlen a und q gibt es unendlich viele Primzahlen $\equiv a \bmod q$.

- Arithmetische Progression (AP): Folge $a, a+q, a+2q, \ldots$
- endliche AP: $\{a+nq \ : \ n \in \mathbb{N}_0, n \leq x\}$ für $a, q \in \mathbb{N}$ und $x > 1$
- unendliche AP (Restklasse): $\{a+nq \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ für $a, q \in \mathbb{N}$

Zählfunktion für Primzahlen in Restklassen:
$\pi(x; q, a) := \#\{p \leq x : \ p \equiv a \bmod q\}$

Primzahlsatz in Progressionen:

Für $\operatorname{ggT}(a, q) = 1$ gilt

$$\pi(x; q, a) = \frac{\operatorname{li}(x)}{\varphi(q)} \left(1 + \mathrm{o}(1)\right).$$

Def.: $\varphi(q) := \#\{a \in \{1, \ldots, q\}; \ \operatorname{ggT}(a, q) = 1\}$, z. B. $\varphi(10) = 4$.

Restklassenverteilung der Primzahlen

Die Primzahlen verteilen sich also asymptotisch gleichmäßig auf die $\varphi(q)$ vielen reduzierten Restklassen $a \bmod q$.

Restklassenverteilung der Primzahlen

Die Primzahlen verteilen sich also asymptotisch gleichmäßig auf die $\varphi(q)$ vielen reduzierten Restklassen $a \bmod q$.

Konsequenz z. B.: Unendlich viele Primzahlen haben jeweils die Endziffer 1, 3, 7, oder 9, und zwar mit einem Anteil von 25% unter allen Primzahlen, denn $\varphi(10) = 4$. Analog für andere Basen als 10.

Restklassenverteilung der Primzahlen

Die Primzahlen verteilen sich also asymptotisch gleichmäßig auf die $\varphi(q)$ vielen reduzierten Restklassen $a \bmod q$.

Konsequenz z. B.: Unendlich viele Primzahlen haben jeweils die Endziffer 1, 3, 7, oder 9, und zwar mit einem Anteil von 25% unter allen Primzahlen, denn $\varphi(10) = 4$. Analog für andere Basen als 10.

Aber: Die von $\mathrm{o}(1)$ induzierte Funktion hängt von q und a ab!

Restklassenverteilung der Primzahlen

Die Primzahlen verteilen sich also asymptotisch gleichmäßig auf die $\varphi(q)$ vielen reduzierten Restklassen $a \bmod q$.

Konsequenz z. B.: Unendlich viele Primzahlen haben jeweils die Endziffer 1, 3, 7, oder 9, und zwar mit einem Anteil von 25% unter allen Primzahlen, denn $\varphi(10) = 4$. Analog für andere Basen als 10.

Aber: Die von $\mathrm{o}(1)$ induzierte Funktion hängt von q und a ab!

Siegel–Walfisz (1936): Gleichmäßig in $q \le (\log x)^A$, $(a, q) = 1$ gilt für ein $C = C(A) > 0$ die Abschätzung

$$\pi(x; q, a) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} + \mathrm{O}\left(x e^{-C\sqrt{\log x}}\right).$$

Restklassenverteilung der Primzahlen

Die Primzahlen verteilen sich also asymptotisch gleichmäßig auf die $\varphi(q)$ vielen reduzierten Restklassen $a \bmod q$.

Konsequenz z. B.: Unendlich viele Primzahlen haben jeweils die Endziffer 1, 3, 7, oder 9, und zwar mit einem Anteil von 25% unter allen Primzahlen, denn $\varphi(10) = 4$. Analog für andere Basen als 10.

Aber: Die von $\mathrm{o}(1)$ induzierte Funktion hängt von q und a ab!

Siegel–Walfisz (1936): Gleichmäßig in $q \leq (\log x)^A$, $(a, q) = 1$ gilt für ein $C = C(A) > 0$ die Abschätzung

$$\pi(x; q, a) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} + \mathrm{O}\left(xe^{-C\sqrt{\log x}}\right).$$

Eine solche Approximation von $\pi(x; q, a)$, die gleichmäßig in q ist, kann nicht für wesentlich größere q-Bereiche gezeigt werden.

Die (GRH): Die verallgemeinerte (RH)

Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung (GRH):

Sei $L(s, \chi)$ eine Dirichletsche L-Funktion zu einem Dirichletcharakter χ mod q. Dann liegen alle Nullstellen von $L(s, \chi)$ mit $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$ auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Die (GRH): Die verallgemeinerte (RH)

Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung (GRH):

Sei $L(s, \chi)$ eine Dirichletsche L-Funktion zu einem Dirichletcharakter χ mod q. Dann liegen alle Nullstellen von $L(s, \chi)$ mit $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$ auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Arithmetische Formulierung der (GRH):

(GRH) für L-Funktionen mod $q \leq x$

$$\iff \quad \pi(x; q, a) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} + \mathrm{O}(x^{1/2} \log x).$$

Die (GRH): Die verallgemeinerte (RH)

Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung (GRH):

Sei $L(s,\chi)$ eine Dirichletsche L-Funktion zu einem Dirichletcharakter χ mod q. Dann liegen alle Nullstellen von $L(s,\chi)$ mit $0 \le \operatorname{Re} s \le 1$ auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Arithmetische Formulierung der (GRH):

(GRH) für L-Funktionen mod $q \le x$

$$\iff \quad \pi(x;q,a) = \frac{\operatorname{li}(x)}{\varphi(q)} + \mathrm{O}(x^{1/2}\log x).$$

Diese Abschätzung des Fehlerterms ist nichttrivial für $q \le x^{1/2-\varepsilon}$ bzw. $x \ge q^{2+\varepsilon}$.

Die (GRH): Die verallgemeinerte (RH)

Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung (GRH):

Sei $L(s, \chi)$ eine Dirichletsche L-Funktion zu einem Dirichletcharakter χ mod q. Dann liegen alle Nullstellen von $L(s, \chi)$ mit $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$ auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Arithmetische Formulierung der (GRH):

(GRH) für L-Funktionen mod $q \leq x$

$$\iff \quad \pi(x; q, a) = \frac{\operatorname{li}(x)}{\varphi(q)} + \mathrm{O}(x^{1/2} \log x).$$

Diese Abschätzung des Fehlerterms ist nichttrivial für $q \leq x^{1/2-\varepsilon}$ bzw. $x \geq q^{2+\varepsilon}$.
Eine sehr starke Vermutung von Montgomery besagt, dass der Fehlerterm hier von der Form $O_\varepsilon(x^{1/2+\varepsilon} q^{-1/2})$ sein müsste, gleichmäßig für alle $q \leq x^{1/2}$.

Der Satz von Bombieri–Vinogradov

Fehler–Abschätzung „im Mittel“ über alle Moduln q:

Der Satz von Bombieri–Vinogradov

Fehler–Abschätzung „im Mittel“ über alle Moduln q:

Satz von Bombieri–Vinogradov (1966):

Für $A > 0$ und $Q \leq x^{1/2}(\log x)^{-A-5/2}$ gilt:

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \left| \pi(x; q, a) - \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} \right| = \mathrm{O}\big(x(\log x)^{-A}\big).$$

Der Satz von Bombieri–Vinogradov

Fehler–Abschätzung „im Mittel" über alle Moduln q:

Satz von Bombieri–Vinogradov (1966):

Für $A > 0$ und $Q \leq x^{1/2}(\log x)^{-A-5/2}$ gilt:

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \left| \pi(x; q, a) - \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} \right| = \mathrm{O}\big(x(\log x)^{-A}\big).$$

Korollar:

- Der PZS in Progressionen gilt gleichmäßig für *fast alle* Moduln $q \leq Q \leq x^{1/2}(\log x)^{-A-5/2}$,

Der Satz von Bombieri–Vinogradov

Fehler–Abschätzung „im Mittel" über alle Moduln q:

Satz von Bombieri–Vinogradov (1966):

Für $A > 0$ und $Q \leq x^{1/2}(\log x)^{-A-5/2}$ gilt:

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \left| \pi(x; q, a) - \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} \right| = \mathrm{O}\big(x(\log x)^{-A}\big).$$

Korollar:

- Der PZS in Progressionen gilt gleichmäßig für *fast alle* Moduln $q \leq Q \leq x^{1/2}(\log x)^{-A-5/2}$,
- Die (GRH) ist für *fast alle* Moduln $q \leq Q$ mit $x^{1/2-\delta} \leq Q \leq x^{1/2}(\log x)^{-A-5/2}$ erfüllt,

Der Satz von Bombieri–Vinogradov

Fehler–Abschätzung „im Mittel“ über alle Moduln q:

Satz von Bombieri–Vinogradov (1966):

Für $A > 0$ und $Q \leq x^{1/2}(\log x)^{-A-5/2}$ gilt:

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \left| \pi(x;q,a) - \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} \right| = \mathrm{O}\left(x(\log x)^{-A}\right).$$

Korollar:

- Der PZS in Progressionen gilt gleichmäßig für *fast alle* Moduln $q \leq Q \leq x^{1/2}(\log x)^{-A-5/2}$,
- Die (GRH) ist für *fast alle* Moduln $q \leq Q$ mit $x^{1/2-\delta} \leq Q \leq x^{1/2}(\log x)^{-A-5/2}$ erfüllt,

die Anzahl der Ausnahmen beträgt $\mathrm{o}(Q)$.

Der Satz von Bombieri–Vinogradov

Fehler–Abschätzung „im Mittel" über alle Moduln q:

Satz von Bombieri–Vinogradov (1966):

Für $A > 0$ und $Q \leq x^{1/2}(\log x)^{-A-5/2}$ gilt:

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \left| \pi(x;q,a) - \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} \right| = \mathrm{O}\left(x(\log x)^{-A}\right).$$

Korollar:

- Der PZS in Progressionen gilt gleichmäßig für *fast alle* Moduln $q \leq Q \leq x^{1/2}(\log x)^{-A-5/2}$,
- Die (GRH) ist für *fast alle* Moduln $q \leq Q$ mit $x^{1/2-\delta} \leq Q \leq x^{1/2}(\log x)^{-A-5/2}$ erfüllt,

die Anzahl der Ausnahmen beträgt $\mathrm{o}(Q)$.

Elliott-Halberstam-Vermutung (EH): Die BV-Abschätzung gilt vermutlich sogar für $Q \leq x(\log x)^{-B}$, wo $B > 0$ beliebig ist.

Die Verteilung der Primzahlen

Die Verteilung der Primzahlen in Restklassen

Primzahlzwillinge und Primzahllücken

Primzahlmuster

Neue Fortschritte bei kleinen Primzahllücken

Primzahlzwillinge

Primzahlzwillingsvermutung: Es gibt unendlich viele Primzahlpaare $p, p+2 \in \mathbb{P}$.

Primzahlzwillinge

Primzahlzwillingsvermutung: Es gibt unendlich viele Primzahlpaare $p, p+2 \in \mathbb{P}$.

Zwillingsvermutung von de Polignac (1849): Für festes $k \in \mathbb{N}$ gibt es unendlich viele Primzahlpaare $p, p+2k \in \mathbb{P}$.

Primzahlzwillinge

Primzahlzwillingsvermutung: Es gibt unendlich viele Primzahlpaare $p, p+2 \in \mathbb{P}$.

Zwillingsvermutung von de Polignac (1849): Für festes $k \in \mathbb{N}$ gibt es unendlich viele Primzahlpaare $p, p+2k \in \mathbb{P}$.

Wie viele Primzahlzwillinge gibt es? Zwillingszählfunktion:

$$\pi_2(x) := \#\{p \leq x;\ \ p, p+2 \text{ prim}\}$$

Primzahlzwillinge

Primzahlzwillingsvermutung: Es gibt unendlich viele Primzahlpaare $p, p+2 \in \mathbb{P}$.

Zwillingsvermutung von de Polignac (1849): Für festes $k \in \mathbb{N}$ gibt es unendlich viele Primzahlpaare $p, p+2k \in \mathbb{P}$.

Wie viele Primzahlzwillinge gibt es? Zwillingszählfunktion:

$$\pi_2(x) := \#\{p \leq x;\ p, p+2 \text{ prim}\}$$

Wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen, motiviert durch den Primzahlsatz, zeigen, dass

$$\pi_2(x) \sim 2C_2 \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \sim 2C_2 \frac{x}{\log^2 x}$$

richtig sein müsste (starke Primzahlzwillingsvermutung), wobei man

$$C_2 = \prod_{p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \approx 0,66016\ldots$$

die Primzahlzwillingskonstante nennt.

Ergebnisse von Brun

Demnach müsste es deutlich weniger Primzahlzwillinge als Primzahlen bis x geben. Dies wurde gezeigt:

Ergebnisse von Brun

Demnach müsste es deutlich weniger Primzahlzwillinge als Primzahlen bis x geben. Dies wurde gezeigt:

V. Brun zeigte (um 1920) mithilfe von Siebtheorie:

$$\pi_2(x) = \mathrm{O}\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Korollar: $\displaystyle\sum_{p,p+2\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ konvergiert.

Ergebnisse von Brun

Demnach müsste es deutlich weniger Primzahlzwillinge als Primzahlen bis x geben. Dies wurde gezeigt:

V. Brun zeigte (um 1920) mithilfe von Siebtheorie:

$$\pi_2(x) = \mathrm{O}\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Korollar: $\displaystyle\sum_{p,p+2\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ konvergiert.

Damit bleibt unentschieden, ob es nun endlich oder unendlich viele Primzahlzwillinge gibt ("Brunscher Witz").

Ergebnisse von Brun

Demnach müsste es deutlich weniger Primzahlzwillinge als Primzahlen bis x geben. Dies wurde gezeigt:

V. Brun zeigte (um 1920) mithilfe von Siebtheorie:

$$\pi_2(x) = \mathrm{O}\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Korollar: $\displaystyle\sum_{p,p+2\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ konvergiert.

Damit bleibt unentschieden, ob es nun endlich oder unendlich viele Primzahlzwillinge gibt ("Brunscher Witz").

Dennoch kann die Brunsche Arbeit als der Grundstein der modernen Siebtheorie gesehen werden.

Die Brunsche Konstante

T. Nicely begann um 1995, eine genaue numerische Berechnung der Brunschen Konstante

$$\sum_{p,p+2\in\mathbb{P}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right) \approx 1.9021605822\ldots$$

vorzunehmen.

Die Brunsche Konstante

T. Nicely begann um 1995, eine genaue numerische Berechnung der Brunschen Konstante

$$\sum_{p,p+2\in\mathbb{P}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right) \approx 1.9021605822\ldots$$

vorzunehmen.

Dabei deckte er einen Fehler in der Fließkommaarithmetik des Pentium Computer Chips auf, deren Behebung die Herstellerfirma Intel schätzungsweise einige Millionen Dollar gekostet hatte.

Die Verteilung der Primzahlen

Die Verteilung der Primzahlen in Restklassen

Primzahlzwillinge und Primzahllücken

Primzahlmuster

Neue Fortschritte bei kleinen Primzahllücken

Allgemeinere Primzahlmuster

Idee: Verallgemeinerung des Zwillingsproblems zu einem Primzahlmusterproblem:

Allgemeinere Primzahlmuster

Idee: Verallgemeinerung des Zwillingsproblems zu einem Primzahlmusterproblem:

Was ist ein "Muster"? Gegeben ist hier eine Konstellation in Form eines Tupels $(b_1, b_2, \ldots, b_k) \in \mathbb{N}_0^k$ mit $b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_k$.

Allgemeinere Primzahlmuster

Idee: Verallgemeinerung des Zwillingsproblems zu einem Primzahlmusterproblem:

Was ist ein "Muster"? Gegeben ist hier eine Konstellation in Form eines Tupels $(b_1, b_2, \ldots, b_k) \in \mathbb{N}_0^k$ mit $b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_k$.

Frage: Wird das Muster unendlich oft mit Primzahlen belegt, d. h. gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $n + b_1, \ldots, n + b_k \in \mathbb{P}$?

Allgemeinere Primzahlmuster

Idee: Verallgemeinerung des Zwillingsproblems zu einem Primzahlmusterproblem:

Was ist ein “Muster”? Gegeben ist hier eine Konstellation in Form eines Tupels $(b_1, b_2, \dots, b_k) \in \mathbb{N}_0^k$ mit $b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_k$.

Frage: Wird das Muster unendlich oft mit Primzahlen belegt, d. h. gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $n + b_1, \dots, n + b_k \in \mathbb{P}$?

Das geht nicht immer: Z. B. kann das Muster $(0, 2, 4)$ nicht unendlich oft Primzahltripel erzeugen, weil von drei Zahlen $n, n + 2, n + 4$ immer eine durch 3 teilbar ist. Denn das Muster $(0, 2, 4)$ deckt *alle* drei Reste modulo 3 ab:
$0 \equiv 0 \mod 3$, $2 \equiv 2 \mod 3$, $4 \equiv 1 \mod 3$.

Die Prim-k-Tupel-Vermutung (DHL)

Werden für jede Primzahl p nicht alle Reste mod p durch das Mustertupel abgedeckt, kann aber erwartet werden, dass es unendlich oft Primzahlen erzeugt.

Die Prim-k-Tupel-Vermutung (DHL)

Werden für jede Primzahl p nicht alle Reste mod p durch das Mustertupel abgedeckt, kann aber erwartet werden, dass es unendlich oft Primzahlen erzeugt.

Wir nennen ein Tupel $(b_1, \ldots, b_k) \in \mathbb{N}_0^k$ *zulässig*, falls $b_1 < \cdots < b_k$ und $\forall p \in \mathbb{P}\ \exists a \bmod p\ \forall i \in \{1, \ldots, k\} : b_i \not\equiv a \bmod p$.

Die Prim-k-Tupel-Vermutung (DHL)

Werden für jede Primzahl p nicht alle Reste mod p durch das Mustertupel abgedeckt, kann aber erwartet werden, dass es unendlich oft Primzahlen erzeugt.

Wir nennen ein Tupel $(b_1, \ldots, b_k) \in \mathbb{N}_0^k$ *zulässig*, falls $b_1 < \cdots < b_k$ und $\forall p \in \mathbb{P}\ \exists a \bmod p\ \forall i \in \{1, \ldots, k\} :$ $b_i \not\equiv a \bmod p$.

Weitere Beispiele: $(0, 2)$, $(0, 4)$, $(0, 2, 6, 8, 12)$ sind zulässig.

Prim-k-Tupel-Vermutung von Dickson–Hardy–Littlewood (DHL):

Sei $(b_1, \ldots, b_k) \in \mathbb{N}_0^k$ ein zulässiges k-Tupel. Dann gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $n + b_1, n + b_2, \ldots, n + b_k \in \mathbb{P}$.

Der Satz von Green–Tao

Ein Durchbruch in Richtung Prim-k-Tupel-Vermutung (Fields-Medaille an T. Tao 2006):

Satz von Green–Tao:
Es gibt unendlich viele lineare Polynome $f(x) = a + qx \in \mathbb{N}[x]$, für die $f(0), f(1), \ldots, f(k-1)$ alle prim sind.

Der Satz von Green–Tao

Ein Durchbruch in Richtung Prim-k-Tupel-Vermutung (Fields-Medaille an T. Tao 2006):

Satz von Green–Tao:
Es gibt unendlich viele lineare Polynome $f(x) = a + qx \in \mathbb{N}[x]$, für die $f(0), f(1), \ldots, f(k-1)$ alle prim sind.

M. a. W.: Es gibt unendlich viele arithmetische Progressionen $a, a+q, a+q\cdot 2, \ldots, a+q\cdot(k-1)$ der Länge k, die nur aus Primzahlen bestehen.

Der Satz von Green–Tao

Ein Durchbruch in Richtung Prim-k-Tupel-Vermutung (Fields-Medaille an T. Tao 2006):

Satz von Green–Tao:
Es gibt unendlich viele lineare Polynome $f(x) = a + qx \in \mathbb{N}[x]$, für die $f(0), f(1), \ldots, f(k-1)$ alle prim sind.

M. a. W.: Es gibt unendlich viele arithmetische Progressionen $a, a+q, a+q\cdot 2, \ldots, a+q\cdot(k-1)$ der Länge k, die nur aus Primzahlen bestehen.

Über eine *feste* AP-Konstellation der Gestalt $(b_1, \ldots, b_k) = (0, q, 2q, \ldots, (k-1)q)$ (d. h. mit q fest), macht der Satz aber keine Aussage.

Die Verteilung der Primzahlen

Die Verteilung der Primzahlen in Restklassen

Primzahlzwillinge und Primzahllücken

Primzahlmuster

Neue Fortschritte bei kleinen Primzahllücken

Kleine Primzahllücken

Ein weiterer Ansatz zur Zwillingsvermutung besteht im Zählen von Primzahlpaaren mit kleinen Abständen wie folgt (“kleine Primzahllücken”).

Kleine Primzahllücken

Ein weiterer Ansatz zur Zwillingsvermutung besteht im Zählen von Primzahlpaaren mit kleinen Abständen wie folgt ("kleine Primzahllücken").

Sei $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \ldots$ die unendliche Folge der Primzahlen. Eine *Primzahllücke* ist dann eine Differenz $p_{n+1} - p_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Kleine Primzahllücken

Ein weiterer Ansatz zur Zwillingsvermutung besteht im Zählen von Primzahlpaaren mit kleinen Abständen wie folgt ("kleine Primzahllücken").

Sei $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \ldots$ die unendliche Folge der Primzahlen. Eine *Primzahllücke* ist dann eine Differenz $p_{n+1} - p_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Wie klein ist die kleinste Primzahllücke, die unendlich oft vorkommt, d. h. wie kann $\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n)$ nach oben abgeschätzt werden?

Kleine Primzahllücken

Ein weiterer Ansatz zur Zwillingsvermutung besteht im Zählen von Primzahlpaaren mit kleinen Abständen wie folgt ("kleine Primzahllücken").

Sei $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \dots$ die unendliche Folge der Primzahlen. Eine *Primzahllücke* ist dann eine Differenz $p_{n+1} - p_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Wie klein ist die kleinste Primzahllücke, die unendlich oft vorkommt, d. h. wie kann $\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n)$ nach oben abgeschätzt werden?

Ist die Primzahlzwillingsvermutung wahr, ist dieser Wert $= 2$.

Kleine Primzahllücken

Ein weiterer Ansatz zur Zwillingsvermutung besteht im Zählen von Primzahlpaaren mit kleinen Abständen wie folgt ("kleine Primzahllücken").

Sei $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \ldots$ die unendliche Folge der Primzahlen. Eine *Primzahllücke* ist dann eine Differenz $p_{n+1} - p_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Wie klein ist die kleinste Primzahllücke, die unendlich oft vorkommt, d. h. wie kann $\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n)$ nach oben abgeschätzt werden?

Ist die Primzahlzwillingsvermutung wahr, ist dieser Wert $= 2$.

Der Primzahlsatz zeigt, dass die Differenz $p_{n+1} - p_n$ *im Mittel* etwa $\log p_n$ beträgt.
Tatsächlich ist diese unendlich oft kleiner:

Der Durchbruch von GPY im Jahr 2007

Goldston, Pintz, Yıldırım (GPY 2007): Beweis der *"small gap conjecture"*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} = 0,$$

genauer:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{(\log p_n)^{1/2}(\log\log p_n)^2} < \infty.$$

Der Durchbruch von GPY im Jahr 2007

Goldston, Pintz, Yıldırım (GPY 2007): Beweis der *"small gap conjecture"*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n} = 0,$$

genauer:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{(\log p_n)^{1/2}(\log\log p_n)^2} < \infty.$$

Unter Annahme der Elliott–Halberstam-Vermutung (die (EH), welche weitreichender als die Riemannsche Vermutung ist, s.o.) folgt die *"bounded gap conjecture"*, nämlich

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n) \leq 16.$$

Der Durchbruch von GPY im Jahr 2007

Goldston, Pintz, Yıldırım (GPY 2007): Beweis der *"small gap conjecture"*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} = 0,$$

genauer:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{(\log p_n)^{1/2}(\log\log p_n)^2} < \infty.$$

Unter Annahme der Elliott–Halberstam-Vermutung (die (EH), welche weitreichender als die Riemannsche Vermutung ist, s.o.) folgt die *"bounded gap conjecture"*, nämlich

$$\liminf_{n\to\infty} (p_{n+1} - p_n) \le 16.$$

Idee von GPY: Eine Variante des Selberg-Siebes.

Der Durchbruch von Zhang im Mai 2013

Am 14. Mai 2013 wurde bekannt, dass Y. Zhang die Existenz einer natürlichen Zahl H bewiesen hatte, für die

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) \leq H$$

gilt, d.h. er hatte die „bounded gap conjecture“ gelöst ohne Annahme einer unbewiesenen Vermutung.

Der Durchbruch von Zhang im Mai 2013

Am 14. Mai 2013 wurde bekannt, dass Y. Zhang die Existenz einer natürlichen Zahl H bewiesen hatte, für die

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) \leq H$$

gilt, d.h. er hatte die „bounded gap conjecture“ gelöst ohne Annahme einer unbewiesenen Vermutung.
In seiner Arbeit beweist er, dass die Abschätzung mit der Schranke $H = 70.000.000$ richtig ist.

Der Durchbruch von Zhang im Mai 2013

Am 14. Mai 2013 wurde bekannt, dass Y. Zhang die Existenz einer natürlichen Zahl H bewiesen hatte, für die

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) \leq H$$

gilt, d.h. er hatte die „bounded gap conjecture“ gelöst ohne Annahme einer unbewiesenen Vermutung.
In seiner Arbeit beweist er, dass die Abschätzung mit der Schranke $H = 70.000.000$ richtig ist.

Aussage DHL$[k, 2]$:

Ist $(h_1, \ldots, h_k) \in \mathbb{N}_0^k$ ein beliebiges zulässiges k-Tupel, dann sind für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ *mindestens zwei* der Zahlen $n + h_1, \ldots, n + h_k$ Primzahlen.

Der Durchbruch von Zhang im Mai 2013

Am 14. Mai 2013 wurde bekannt, dass Y. Zhang die Existenz einer natürlichen Zahl H bewiesen hatte, für die

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) \leq H$$

gilt, d.h. er hatte die „bounded gap conjecture“ gelöst ohne Annahme einer unbewiesenen Vermutung.
In seiner Arbeit beweist er, dass die Abschätzung mit der Schranke $H = 70.000.000$ richtig ist.

Aussage DHL$[k, 2]$:

Ist $(h_1, \dots, h_k) \in \mathbb{N}_0^k$ ein beliebiges zulässiges k-Tupel, dann sind für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ *mindestens zwei* der Zahlen $n + h_1, \dots, n + h_k$ Primzahlen.

Zhang zeigte DHL$[k, 2]$ mit $k = 3.500.000$. Daraus folgt $H = 70.000.000$.

Das Polymath-Projekt von T. Tao

Von T. Tao wurde daraufhin ein Internet-Projekt namens Polymath 8 initiiert, das mehreren Autoren über das Internet die Zusammenarbeit an der numerischen Verbesserung der Schranke H erlaubt.

Das Polymath-Projekt von T. Tao

Von T. Tao wurde daraufhin ein Internet-Projekt namens Polymath 8 initiiert, das mehreren Autoren über das Internet die Zusammenarbeit an der numerischen Verbesserung der Schranke H erlaubt.
Erste Verbesserungen gelangen über die Auffindung kurzer zulässiger k-Tupel $(h_1, \ldots, h_k)$, da $H \leq h_k - h_1$ gilt.

Das Polymath-Projekt von T. Tao

Von T. Tao wurde daraufhin ein Internet-Projekt namens Polymath 8 initiiert, das mehreren Autoren über das Internet die Zusammenarbeit an der numerischen Verbesserung der Schranke H erlaubt.
Erste Verbesserungen gelangen über die Auffindung kurzer zulässiger k-Tupel $(h_1, \ldots, h_k)$, da $H \leq h_k - h_1$ gilt.
Kurz darauf kamen auch Verbesserungen von k zustande.

Das Polymath-Projekt von T. Tao

Von T. Tao wurde daraufhin ein Internet-Projekt namens Polymath 8 initiiert, das mehreren Autoren über das Internet die Zusammenarbeit an der numerischen Verbesserung der Schranke H erlaubt.
Erste Verbesserungen gelangen über die Auffindung kurzer zulässiger k-Tupel $(h_1, \ldots, h_k)$, da $H \leq h_k - h_1$ gilt.
Kurz darauf kamen auch Verbesserungen von k zustande.

Auf der Internet-Webseite des Projekts kann die Entwicklung und der aktuelle Stand abgerufen werden. Eine Auswahl:

Datum	Autor	H
14. Mai 2013	Zhang	70.000.000
3. Juni 2013	Tao	285.456
16. Juni 2013	Sutherland	60.744
5. Juli 2013	Engelsma	5.414

Das Projekt wurde mit $H = 4.680$ abgeschlossen.

Der Durchbruch von Maynard im November 2013

Am 19. November 2013 wurde von J. Maynard eine Arbeit bei ArXiV veröffentlicht, in der die Zwillingslückenschranke von Zhang auf $H = 600$ verbessert wird.

Der Durchbruch von Maynard im November 2013

Am 19. November 2013 wurde von J. Maynard eine Arbeit bei ArXiV veröffentlicht, in der die Zwillingslückenschranke von Zhang auf $H = 600$ verbessert wird.

Er benutzte einen anderen Ansatz als Y. Zhang, der flexibler und numerisch überlegen ist.

Der Durchbruch von Maynard im November 2013

Am 19. November 2013 wurde von J. Maynard eine Arbeit bei ArXiV veröffentlicht, in der die Zwillingslückenschranke von Zhang auf $H = 600$ verbessert wird.

Er benutzte einen anderen Ansatz als Y. Zhang, der flexibler und numerisch überlegen ist.

Die Idee besteht in einer weiteren Variante des Selberg-Siebes, die näher am Selberg-Sieb ist als das GPY-Sieb und auch schon von Selberg vorgeschlagen, aber bisher noch nicht gewinnbringend eingesetzt wurde.

Das Projekt Polymath 8b

Das Polymath-Projekt wurde am Tag der Veröffentlichung der Maynard-Arbeit von T. Tao in die Projekte 8a (das bisherige, was nicht weiter verfolgt wird) und 8b aufgespalten.

Das Projekt Polymath 8b

Das Polymath-Projekt wurde am Tag der Veröffentlichung der Maynard-Arbeit von T. Tao in die Projekte 8a (das bisherige, was nicht weiter verfolgt wird) und 8b aufgespalten.

Das neue Projekt 8b arbeitet an den weiteren Verbesserungen der Maynard-Methode. Mittlerweile ist so die Zwillingslückenschranke auf $H = 246$ gedrückt worden.

Das Projekt Polymath 8b

Das Polymath-Projekt wurde am Tag der Veröffentlichung der Maynard-Arbeit von T. Tao in die Projekte 8a (das bisherige, was nicht weiter verfolgt wird) und 8b aufgespalten.

Das neue Projekt 8b arbeitet an den weiteren Verbesserungen der Maynard-Methode. Mittlerweile ist so die Zwillingslückenschranke auf $H = 246$ gedrückt worden.

Unter Annahme der (EH) zeigt die Maynard-Methode $H = 12$, und unter Annahme einer technischen Verallgemeinerung der (EH) kann diese sogar auf $H = 6$ gedrückt werden.

Das Projekt Polymath 8b

Das Polymath-Projekt wurde am Tag der Veröffentlichung der Maynard-Arbeit von T. Tao in die Projekte 8a (das bisherige, was nicht weiter verfolgt wird) und 8b aufgespalten.

Das neue Projekt 8b arbeitet an den weiteren Verbesserungen der Maynard-Methode. Mittlerweile ist so die Zwillingslückenschranke auf $H = 246$ gedrückt worden.

Unter Annahme der (EH) zeigt die Maynard-Methode $H = 12$, und unter Annahme einer technischen Verallgemeinerung der (EH) kann diese sogar auf $H = 6$ gedrückt werden.

Diese Werte für H sind die theoretisch derzeit besten, die durch die aktuellen Methoden erreicht werden können. Für weitere Verbesserungen sind wiederum grundlegend neue Ideen erforderlich.

Vielen Dank!