Zahlenfolgen bei Gebietsteilungsproblemen

Karin Halupczok

11. Oktober 2005

Zusammenfassung

Gesucht sind rekursive und explizite Bildungsgesetze von Zahlenfolgen, die bei Gebietsteilungsproblemen auftauchen: In wieviele Gebiete kann die Ebene durch Einzeichnen von n vielen k-Ecken zerlegt werden? Wieviele Diagonalenschnittpunkte kann es in einem n-Eck geben? Bei all diesen Fragen spielt immer das Pascalsche Dreieck eine große Rolle.

Email: Karin.Halupczok@math.uni-freiburg.de

Das Pascalsche Dreieck

Das Pascalsche Dreieck ist das folgende dreieckige Zahlenschema:

n, k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Für die Zahl in Zeile n und Spalte k benutzen wir das Symbol $\binom{n}{k}$. Dabei seien $n, k \geq 0$, und alle nichteingetragenen Zahlen sollen $= 0$ sein.

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ nennt man *Binomialkoeffizienten*, denn sie kommen im allgemeinen Binomischen Satz als Vorzahlen („Koeffizienten“) vor.

Für diese gilt die Formel

$$\binom{n}{0} := 1 \text{ und } \binom{n+1}{k+1} := \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

für alle $n, k \geq 0$.

Diese Formel ist das Bildungsgesetz für die Zahlen(doppel)folge $\binom{n}{k}$. Um einen bestimmten Wert zu berechnen, greift man dabei zurück auf schon berechnete Werte der Zahlenfolge; ein solches Bildungsgesetz nennt man $rekursiv$. So eine Formel ist aber unpraktisch, wenn man konkret Werte wie $\binom{100}{53}$ ausrechnen möchte: man muß das Pascalsche Dreieck bis Zeile 100 durchrechnen.

Deswegen möchte man auch eine $explizite$ Formel zur Berechnung der Folge haben. Für die Binomialkoeffizienten gibt es eine solche Formel, nämlich

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1},$$

denn der Term auf der rechten Seite liefert die richtigen Werte für Zahlenpaare (n,k) mit $n,k \geq 0$: Für die Anfangswerte jeder Zeile haben wir $\binom{n}{0} = 1$ und der Term erfüllt die Rekursionsformel, wie wir hier sehen:

$$
\begin{aligned}
&\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} \\
&\qquad = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1\cdot(k+1)} \\
&\qquad + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)k(k-1)\cdots 2\cdot 1} \\
&\qquad = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)k(k-1)\cdots 2\cdot 1} \\
&\qquad = \binom{n+1}{k+1},
\end{aligned}
$$

d. h. gilt die Formel für feste Zahlenpaare (n,k) und $(n,k+1)$, so auch für $(n+1,k+1)$, und damit für *alle* Zahlenpaare (n,k) („*Vollständige Induktion*“).

Kombinatorische Deutung: $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl Möglichkeiten, aus einer Menge X mit n vielen Elementen eine Menge Y mit k vielen Elementen auszuwählen.

Beispiel: Ein einfaches Beispiel ist $n = 3$, $k = 2$, $X = \{1, 2, 3\}$, alle möglichen 2-elementigen Teilmengen Y sind $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$, das sind $3 = \binom{3}{2}$ viele.

Begründung der kombinatorischen Deutung: Wir überlegen uns die Rekursionsformel für diese Anzahl Möglichkeiten.

Wählt man eine $(k+1)$-elementige Menge Y aus einer $(n+1)$-elementigen Menge X aus, gibt es einerseits Mengen, die ein bestimmtes Element Nr. $n+1$ enthalten (das sind $\binom{n}{k}$ viele), und andererseits die Mengen, die es nicht enthalten (das sind $\binom{n}{k+1}$ viele).

Im Pascalschen Dreieck stehen in der Spalte $k = 2$ die Zahlen $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$. Diese erfüllen die Formel „vom kleinen Gauß“, nämlich

$$\frac{n(n-1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1),$$

denn die Rekursionsformel $\binom{2}{2} = 1$ und $\binom{n}{2} = \binom{n-1}{2} + (n-1)$ (aus der Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten) definiert eindeutig die Folge $\binom{n}{2}$, und ebenso tut dies die Folge $a_n := 1+2+\cdots+(n-1)$

(d. h. es ist $a_n = a_{n-1} + n - 1$, $a_2 = 1$), also stimmen die Folgen überein, d. h. $\binom{n}{2} = a_n$.

Das Pascalsche Dreieck hat noch eine andere erstaunliche Eigenschaft: Addiert man sämtliche Einträge einer Zeile n, so erhält man immer eine Zweierpotenz, nämlich

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

für alle $n \geq 0$.

(Denn diese Summe ergibt die Anzahl Möglichkeiten, *irgendeine* Menge Y aus einer n-elementigen Menge X auszuwählen, und diese ist 2^n, da es für jedes der n Elemente von X genau zwei Möglichkeiten gibt: Entweder ist es in der ausgewählten Menge Y enthalten oder nicht. Das macht insgesamt 2^n viele Möglichkeiten.)

Folgen bei Gebietsteilungen

Raumteilungsprobleme

Im Eindimensionalen:

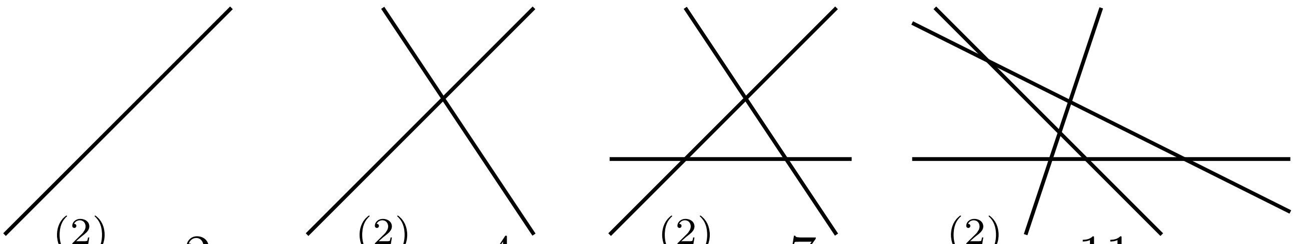
Wir teilen eine Gerade mit Punkten in Geradenabschnitte („Gebiete“): Die maximale Anzahl der Gebiete, in die die Gerade mit n Punkten eingeteilt werden kann, bezeichnen wir mit $g_n^{(1)}$.

$g_1^{(1)} = 2$ $\quad$ $g_2^{(1)} = 3$ $\quad$ $g_3^{(1)} = 4$ $\quad$ $g_4^{(1)} = 5$

Wir haben also: $\quad g_n^{(1)} = n + 1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$.

Im Zweidimensionalen:

Wir teilen eine Ebene mit Geraden in Gebiete: Die maximale Anzahl der Gebiete, in die die Ebene mit n Geraden eingeteilt werden kann, sei $g_n^{(2)}$.



$g_1^{(2)} = 2$ $\quad$ $g_2^{(2)} = 4$ $\quad$ $g_3^{(2)} = 7$ $\quad$ $g_4^{(2)} = 11$

Rekursives Bildungsgesetz: $g_1^{(2)} = 2$ und

$$g_{n+1}^{(2)} = g_n^{(2)} + g_n^{(1)} = g_n^{(2)} + n + 1 = g_n^{(2)} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0},$$

denn die $(n+1)$-te Gerade wird von den vorangehenden n Geraden in n Punkten geschnitten und so in $g_n^{(1)} = n + 1$ Geradenabschnitte eingeteilt. Dadurch ergeben sich ebensoviele neue Flächengebiete, denn jeder Geradenabschnitt halbiert ein bisheriges Flächengebiet.

Explizites Bildungsgesetz:

$$g_n^{(2)} = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0} = \frac{1}{2}n(n+1) + 1.$$

Im Dreidimensionalen:

Wir teilen einen Raum mit Ebenen in Gebiete: Die maximale Anzahl der Gebiete, in die der Raum mit n Ebenen eingeteilt werden kann, sei $g_n^{(3)}$.

Wir können uns überlegen:

$$g_1^{(3)} = 2, \quad g_2^{(3)} = 4, \quad g_3^{(3)} = 8, \quad g_4^{(3)} = 15, \quad \ldots$$

Rekursives Bildungsgesetz: $g_1^{(3)} = 2$ und

$$\begin{aligned} g_{n+1}^{(3)} &= g_n^{(3)} + g_n^{(2)} = g_n^{(3)} + \frac{1}{2}n(n+1) + 1 \\ &= g_n^{(3)} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}, \end{aligned}$$

denn die $(n+1)$-te Ebene wird von den vorangehenden n Ebenen in n Schnittgeraden geschnitten und so in $g_n^{(2)}$ Flächengebiete eingeteilt. Dadurch ergeben sich ebensoviele neue Raumgebiete, denn jedes Flächengebiet halbiert ein bisheriges Raumgebiet.

Explizites Bildungsgesetz:

$$g_n^{(3)} = \binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0},$$

ausgeschrieben:

$$g_n^{(3)} = \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1.$$

Wieviele Gebiete erhält man bei Raumteilung des k-dimensionalen Raumes mit $(k-1)$-dimensionalen Hyperebenen? $(k \geq 1)$

Wie oben gilt $g_1^{(k)} = 2$ und $g_{n+1}^{(k)} = g_n^{(k)} + g_n^{(k-1)}$.

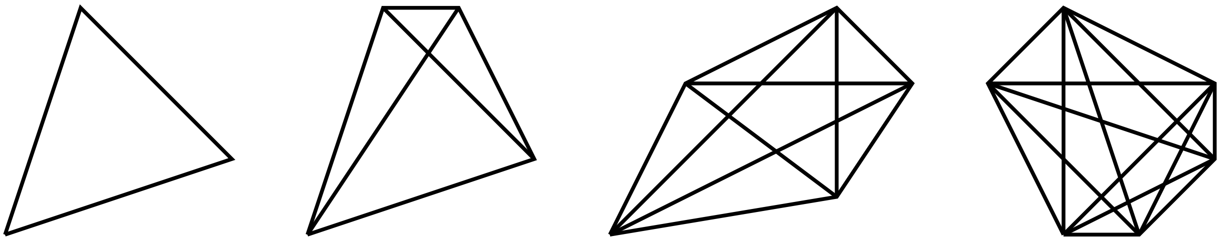
Als explizite Formel erhalten wir

$$g_n^{(k)} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{n}{1} + \binom{n}{0},$$

Welche Potenz von n steht dann in der expliziten Formel für $g_n^{(k)}$, wenn man sie ausschreibt?

Anzahlen im n-Eck

Diagonalen im n-Eck Wir zählen die maximale Anzahl der Diagonalen, die in einem n-Eck gezogen werden können. Wir nennen diese D_n.



$D_3 = 0$ $D_4 = 2$ $D_5 = 5$ $D_6 = 9$

Rekursives Bildungsgesetz: $D_3 = 0$ und

$$D_{n+1} = D_n + (n-2) + 1 = D_n + n - 1.$$

Explizites Bildungsgesetz:

$$\begin{aligned} D_3 &= 0 \\ D_4 &= D_3 + 2 = 2 \\ D_5 &= D_4 + 3 = 2 + 3 \\ D_6 &= D_5 + 4 = 2 + 3 + 4 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} D_n &= 2+3+4+\cdots+(n-2) \\ &= \frac{1}{2}(n-2)(n-1)-1 \\ &= \frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n = \frac{n}{2}(n-3). \end{aligned}$$

Kombinatorische Begründung der expliziten Formel: Wir haben $\binom{n}{2}$ Punktepaare samt Verbindungen, davon sind n viele Seiten, die nicht mitgezählt werden. Somit wird n von $\binom{n}{2}$ abgezogen, dies ergibt D_n:

$$\binom{n}{2}-n=\frac{1}{2}n(n-1)-n=\frac{n}{2}(n-1-2)=\frac{n}{2}(n-3).$$

Oder: Von jedem der n Punkte ausgehend werden $n-3$ viele Diagonalen gezogen, dabei wird jede doppelt gezählt. Also wieder: $D_n=\frac{1}{2}n(n-3)$.

Diagonalenschnittpunkte im n-Eck Wir zählen die maximale Anzahl der Schnittpunkte, die man durch Einzeichnen der Diagonalen in einem n-Eck erhalten kann. Wir nennen diese S_n.

An obigem Bild können wir abzählen:

$$S_3 = 0,\ S_4 = 1,\ S_5 = 5,\ S_6 = 15,\ S_7 = 37,\ \ldots$$

Rekursives Bildungsgesetz: $S_3 = 0$ und

$$S_{n+1} = S_n + \binom{n}{3},$$

denn zu je drei „alten“ Eckpunkten im n-Eck entsteht mit dem $(n+1)$-ten Eckpunkt ein neuer Schnittpunkt. (Eine Diagonale zwischen zwei alten Eckpunkten schneidet die neue Diagonale zwischen dem $(n+1)$-ten Eckpunkt und dem dritten alten Eckpunkt in einem neuen Schnittpunkt.)

Also: $$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2).$$

Explizites Bildungsgesetz:$S_n = \binom{n}{4}$, denn zu je 4 Eckpunkten gehört ein Schnittpunkt.

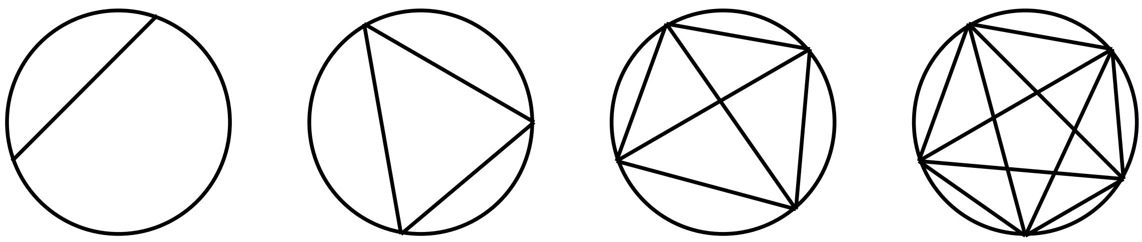
Zusammenhang zwischen rekursiver und expliziter Formel:

$$\binom{n+1}{4} = \binom{n}{4} + \binom{n}{3},$$

wie bereits beim Pascalschen Dreieck zu sehen war.

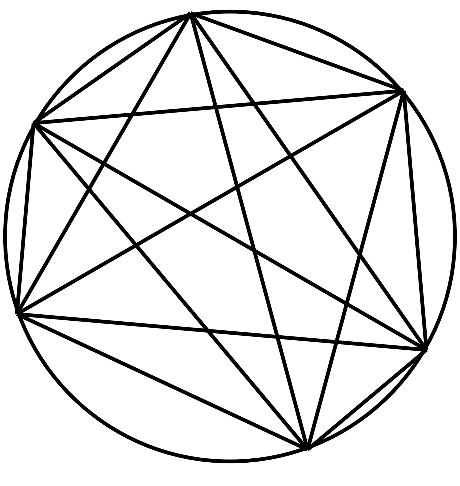
Gebietsteilungen mit Sehnen im Kreis

Wir zählen die maximale Anzahl der Gebiete, die durch Verbinden von n Kreispunkten zu Sehnen entstehen können. Wir nennen diese H_n.



$H_2 = 2$ $H_3 = 4$ $H_4 = 8$ $H_5 = 16$

Wir erwarten nun, daß wohl $H_6 = 32$ gilt. Man findet durch Zeichnen aber, daß offenbar $H_6 = 31$ richtig sein muß:



$H_6 = 31$

Wir gehen dieser merkwürdigen Sache nun systematisch auf den Grund:

Rekursives Bildungsgesetz:

$$H_1 = 1, \qquad H_{n+1} = H_n + \binom{n}{3} + n,$$

denn $\binom{n}{3}$ ist wieder die Anzahl der neuen Schnittpunkte (die Verbindung zwischen zwei solchen halbiert ein altes Gebiet), und dazu kommen n neue Gebiete am Punkt $n+1$.

Die rekursive Formel liefert die explizite Formel

$$H_n = S_n + D_n + n + 1,$$

denn der Term $S_n + D_n + n + 1$ erfüllt die Rekursion für H_n, wir haben nämlich $S_3 + D_3 + 4 = H_3$ und

$$\begin{aligned} &(S_n + D_n + n + 1) + \binom{n}{3} + n \\ =&(S_n + \binom{n}{3}) + (D_n + n - 1) + n + 2 \\ =& \; S_{n+1} + D_{n+1} + (n+1) + 1. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} H_n &= \binom{n}{4} + \binom{n}{2} - n + n + 1 \\ &= \binom{n}{4} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} + 1 \\ &= \binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck erklärt das obige merkwürdige Verhalten der Folge H_n: Bis $n = 5$ liefert die Formel die volle Summe einer Zeile im Pascalschen Dreieck, dann also eine Zweierpotenz, ab $n = 6$ jedoch nicht mehr.

Außerdem kennen wir diese Zahlenfolge schon: Es ist dieselbe wie beim 4-dimensionalen Gebietsteilungsproblem, nämlich $H_n = g_{n-1}^{(4)}$.

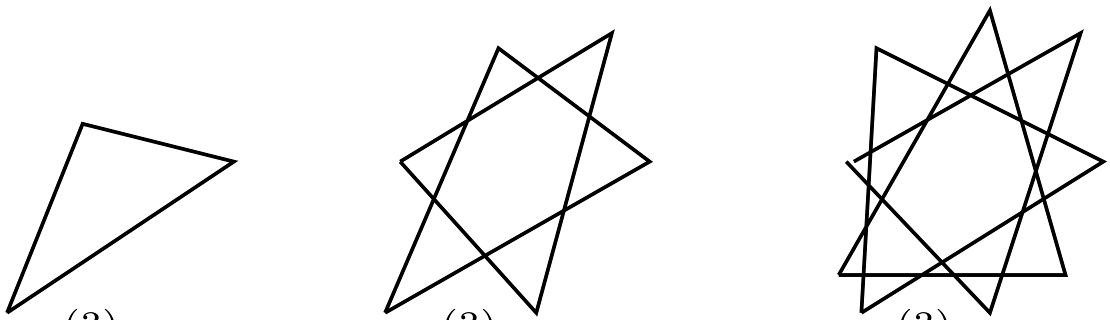
Ausgeschrieben lautet die explizite Formel hier

$$H_n = \frac{1}{24}n^4 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{23}{24}n^2 - \frac{3}{4}n + 1.$$

Gebietsteilungen der Ebene mit k-Ecken

Wir teilen eine Ebene mit k-Ecken in Gebiete: Die maximale Anzahl der Gebiete, in die die Ebene mit n vielen k-Ecken eingeteilt werden kann, sei $G_n^{(k)}$.

Beim Dreieck ($k = 3$):



$G_1^{(3)} = 2$ $\quad$ $G_2^{(3)} = 8$ $\quad$ $G_3^{(3)} = 20$

Beim k-Eck: ($k \geq 3$)

Rekursives Bildungsgesetz:

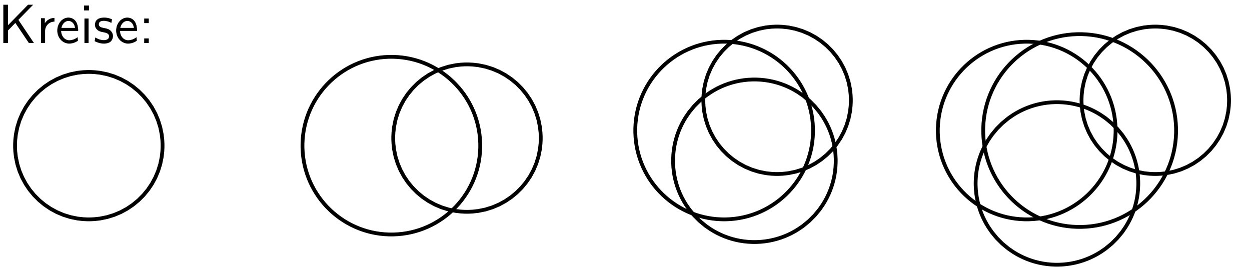
$$G_{n+1}^{(k)} = G_n^{(k)} + 2kn,$$

denn das $(n+1)$-te k-Eck schneidet jede der bisherigen kn Strecken höchstens 2 mal. Das sind insgesamt maximal $2kn$ Schnittpunkte und ebensoviele neue Gebiete, denn zwischen je 2 Schnittpunkten halbiert der zugehörige neue Streckenzug ein altes Gebiet.

Explizites Bildungsgesetz:

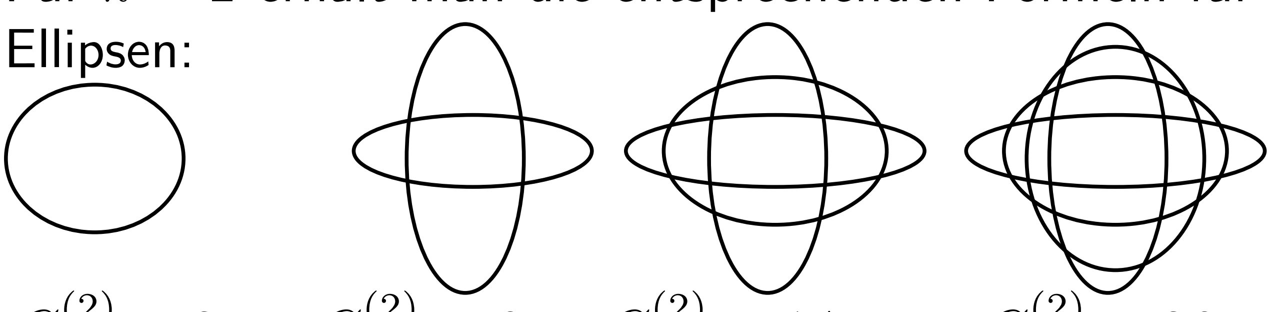
$$\begin{aligned}
G_1^{(k)} &= 2, \quad G_2^{(k)} = 2 + 2k, \\
G_3^{(k)} &= 2 + 2k + 2 \cdot 2k, \\
G_4^{(k)} &= 2 + 2k + 2 \cdot 2k + 2 \cdot 3k \quad \ldots \\
\Longrightarrow G_n^{(k)} &= 2 + 2k(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)) \\
&= 2 + 2k \cdot \frac{1}{2} n(n-1) = 2 + kn^2 - kn.
\end{aligned}$$

Für $k = 1$ erhält man die entsprechenden Formeln für Kreise:



$G_1^{(1)} = 2$ $\quad G_2^{(1)} = 4$ $\quad G_3^{(1)} = 8$ $\quad G_4^{(1)} = 14$

Für $k = 2$ erhält man die entsprechenden Formeln für Ellipsen:



$G_1^{(2)} = 2$ $\quad G_2^{(2)} = 6$ $\quad G_3^{(2)} = 14$ $\quad G_4^{(2)} = 26$