Vorlesung Algebra

SoSe'21, hhu
K. Halupczok

Teil II: RINGE (und Moduln)

A10: Ringe: Definitionen und Beispiele

Stichworte: Def. Ring, Kommutativer Ring, Integritätsbereich, Nullring, Körper, Beispiele $R_1 \times \ldots \times R_m$ u.a., Nullteiler, $\mathbb{Z}$-Vielfache von Ringelementen, Einheiten, Einheitengruppe $R^\times$ eines Rings R, Einheiten von $R_1 \times \ldots \times R_m$, Schiefkörper

---

10.1. Einleitung: Ein Ring ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen + "Plus" und · "Mal", der bzgl. + mit einem El. 0 eine abelsche Gruppe und bzgl. · mit einem El. 1 eine Halbgruppe bildet, zusammen mit den Distributivgesetzen. Wir behandeln erste Beispiele. Die Einheiten eines Rings R bilden eine Gruppe, die Einheitengruppe $R^\times$. Ist $R^\times = R \setminus \{0\}$, so heißt $R \neq \{0\}$ ein Körper, falls R kommutativ (d.h. bzgl. "·"), sonst Schiefkörper.

10.2. Def.: R Ring $:\Leftrightarrow$ R Menge, $\exists$ Verknüpfungen $+, \cdot : R \times R \to R$ $\exists\, 0, 1 \in R$:

$\forall a, b, c \in R$:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & (a+b)+c = a+(b+c) \\ (2) & 0+a = a \\ (3) & \exists\, a' : a'+a = 0 \\ (4) & a+b = b+a \end{array}\right\} (R,+,0) \text{ ab. Gruppe}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (5) & (ab)c = a(bc) \\ (6) & 1a = a1 = a \end{array}\right\} (R,\cdot,1) \text{ Halbgruppe}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (7) & a(b+c) = ab+ac \\ (8) & (a+b)c = ac+bc \end{array}\right\} \text{Distributivgesetze}$$

R kommutativer Ring $:\Leftrightarrow$ zusätzlich: (9) $ab = ba$

R Integritätsbereich $:\Leftrightarrow$ $R \neq \{0\}$ komm. Ring mit zusätzlich:

(10) $ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$. Kurz: IB

10.3. Bsp.:
- Körper sind Integritätsbereiche.
- $\mathbb{Z}$ ist Integritätsbereich.
- K Körper $\Rightarrow$ $K[T]$, der Polynomring über K, ist IB.
- $\{0\}$ mit $0 = 1$ heißt Nullring, er ist laut Def. kein IB.
- Die Kommutativität von "+" muss nicht gefordert werden, vgl. "Lineare Algebra I, L7.16(i)".

10.4. Bsp.: K Körper, $n \geq 1$. Dann:
$K^{n\times n}$ = Ring der $(n\times n)$-Matrizen.
Sei V n-dim. K-VR, dann $\mathrm{End}(V) \cong K^{n\times n}$:
$$f \mapsto M_A(f), \quad M_A(f+g) = M_A(f) + M_A(g)$$
$$M_A(f\circ g) = M_A(f)\cdot M_A(g),$$ A = Basis von V, M_A = Matrixdarstellung bzgl. A
ist Ring-Isomorphismus, Def. s. später in A11.18.

10.5 Bsp.: Seien $R_1, \dots, R_n$ Ringe. Dann $R_1\times\dots\times R_n$ Ring bzgl. komponentenweiser Add. und Mult. mit $\underline{0} := (0_1, \dots, 0_n)$, $\underline{1} := (1_1, \dots, 1_n)$.
$R_1, \dots, R_n$ kommutativ $\Leftrightarrow$ $R_1\times\dots\times R_n$ kommutativ.

10.6 Bsp.: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ die Menge aller stetigen reellwertigen Funktionen, ist kommutativer Ring:
$(f+g)(x) := f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x)$, $0(x) = 0$, $1(x) = 1$.

10.7 Def.: Sei R Ring. $a\in R$ heißt linker (bzw. rechter) Nullteiler
$:\Leftrightarrow$ $\exists\, b \neq 0$ mit $ab = 0$ (bzw. $ba = 0$).

10.8 Bsp.: $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ hat Nullteiler: $(1,0)\cdot(0,1) = (0,0) = \underline{0}$.

10.9 Bem.: Nach 10.2 (1)-(4) ist $(R,+,0)$ ab. Gruppe.
Daher ist für $n\in\mathbb{N}$: na bzw. $-a$ def.

10.10 Bem.: Sei $e\in R$ mit $ea = ae = a$ für alle $a\in R$. Dann: $e = 1$,
da: $e = e\cdot 1 = 1$. Rechenregeln: $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$
$(-a)b = a(-b) = -(ab)$ vgl. LA I, L7.16(ii)-(iv).
$(-a)(-b) = ab$ ← "Minus mal Minus gibt Plus"

10.11 Def.: Sei $n\in\mathbb{Z}$. Dann: $n_R := n\cdot 1_R$ mit 1_R Eins im Ring R.

10.12 Bem.: $\forall a\in R$: $n_R\cdot a = na$.
Bew.: $n\in\mathbb{N}_0$, VI: $n=0$: $0_R = 0\cdot 1_R = 0$ ✓
$n>0$: $(n+1)_R\, a = ((n+1)\cdot 1_R)a = (n\cdot 1_R + 1_R)a$
$= (n1_R)a + 1_R a = na + a = (n+1)a$. ✓
$n<0$: $n_R\cdot a = -((-n)1_R)a = -((-n)a) = na$. ✓ $\square$

A10

10.13. Bem.: In komm. Ringen gilt: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$,
nicht aber in nichtkommutativen Ringen.

10.14. Def.: $u \in R$ Einheit $:\Leftrightarrow \exists v \in R: uv = vu = 1$
$R^\times := \{u \in R;\ u \text{ Einheit}\}$ Einheitengruppe von R.

10.15. Bem.: $R^\times$ ist Gruppe (bzgl. $\cdot$):

Bew.: * Abgeschl. unter $\cdot$:

$u_1, u_2 \in R^\times \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in R: \begin{array}{l} u_1 v_1 = v_1 u_1 = 1 \\ u_2 v_2 = v_2 u_2 = 1 \end{array}$

$\Rightarrow (v_2 v_1)(u_1 u_2) = v_2 (v_1 u_1) u_2 = 1 = (u_1 u_2)(v_2 v_1)$

$\Rightarrow u_1 u_2 \in R^\times$

* Ex. des Inversen:

$u \in R^\times \Rightarrow \exists v \in R: vu = uv = 1 \Rightarrow v \in R^\times$ Inv. von u.

* $1 \in R^\times$: $1 \cdot 1 = 1$. $\square$

10.16. Bsp: $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$
$K^\times = K \setminus \{0\}$, K Körper

10.17. Bsp.: $(R_1 \times \ldots \times R_n)^\times = R_1^\times \times \ldots \times R_n^\times$

Bew.: $(u_1, \ldots, u_n) \in (R_1 \times \ldots \times R_n)^\times$

$\Leftrightarrow \underbrace{(v_1, \ldots, v_n)(u_1, \ldots, u_n)}_{=(v_1 u_1, \ldots, v_n u_n)} = (1, \ldots, 1)$

$\Leftrightarrow u_1 \in R_1^\times, \ldots, u_n \in R_n^\times$. $\square$

10.18. Def: Ringe $R \neq \{0\}$ mit $R^\times = R \setminus \{0\}$, d.h. jedes El. $\neq 0$ ist Einheit,
heißen Schiefkörper (auch: Divisionsringe).

10.19. Bem.: Körper sind also kommutative Schiefkörper.