Vorlesung Algebra

SoSe'21, hhu
K. Halupczok

Teil II: RINGE (und Moduln)

A16: Moduln: Definitionen und Beispiele

Stichworte: R-Modul, Modul-Homomorphismen, direktes Produkt/äußere direkte Summe, Teilmodul, Linksideale/Ideale, Faktormodul, der von S erzeugte Teilmodul $\langle S \rangle$, zyklischer Modul, Annihilator, Torsionselement, Torsions-teil-modul, torsionsfrei, innere direkte Summe, frei, Basis, Rang

---

16.1. Einleitung: Verallgemeinert man in K-VRen den Skalarkörper K zu einem Ring, kommt man zum Modulbegriff. Wir definieren Teilmoduln und Faktormoduln (analog wie bei Gruppen, VRe, ...). Der Annihilator eines Modulelements führt zum Begriff des Torsionselements und Torsionsteils des Moduls. Die Theorie freier Moduln und ihrer Basen folgt analog der Theorie der Vektorräume.

16.2. Def.: Sei R ein Ring (mit Eins). Ein (Links-) R-Modul ist eine abelsche Gruppe M (additiv geschrieben) zusammen mit einer Abb.
$R \times M \to M$, $(a,x) \mapsto a \cdot x = ax$ mit: $\forall a,b \in R\ \forall x,y \in M$:

(i) $a(x+y) = ax + ay$ (ii) $(a+b)x = ax + bx$

(iii) $(ab)x = a(bx)$ (iv) $1 \cdot x = x$.

16.3. Bsp.: (1) R Körper $\Rightarrow$ R-Modul $=$ R-VR

(2) Jede ab. Gruppe A ist vermöge $\mathbb{Z} \times A \to A$, $(n,a) \mapsto n \cdot a$, ein $\mathbb{Z}$-Modul, wobei für $n \geq 0$ gilt $na := \underbrace{a + \ldots + a}_{n\text{-mal}}$, für $-n < 0$ gilt $(-n)a := -(na)$.

(3) R Ring $\Rightarrow$ R ist R-Modul.

(4) K Körper, $K[T]$ Polynomring über K, V ein K-VR, φ ein VR-Endo von V, für $f = \sum_{i=0}^{m} a_i T^i \in K[T]$ ist $f(\varphi) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi^i$ ein Endo von V.
Def. $f \cdot x := f(\varphi)(x)$.
Damit wird V zu einem $K[T]$-Modul, wobei $T \cdot x = \varphi(x)$.

(5) Sei V ein $K[T]$-Modul.
Dann ist $\varphi: V \to V$, $x \mapsto T \cdot x$, ein K-VR-Endo von V.
$\ulcorner \varphi(x+y) = T \cdot (x+y) = T \cdot x + T \cdot y = \varphi(x) + \varphi(y)$,
$\varphi(ax) = T \cdot (ax) = (T \cdot a)x = (a \cdot T)x = a \cdot \varphi(x)$. $\lrcorner$

16.4. Def.: Seien M, N R-Moduln. $\varphi: M \to N$ heißt (R-Modul-)Homomorphismus, falls $\forall x,y \in M\ \forall a \in R$: $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ und $\varphi(ax) = a\,\varphi(x)$.
Analog wie bei VRen: Iso-, Endo-, Epi-, Automorphismus.

16.5. Bsp.: (6) $M \to N,\ x \mapsto 0$ und $M \to M,\ x \mapsto x$ sind Hom.
(7) R komm., $a \in R \Rightarrow \mu_a: M \to M,\ x \mapsto ax$ Endo.
⌜$\mu_a(bx) = a(bx) = (ab)x = (ba)x = b(ax) = b\,\mu_a(x)$.⌟
(8) R-Körper $\Rightarrow$ Modulhom. = lin. Abb.
(9) $R = \mathbb{Z} \Rightarrow$ Jeder Hom. ab. Gr. ist $\mathbb{Z}$-Modul-Hom. wegen $\varphi(na) = n(\varphi(a))$.
(10) $M_1, \dots, M_n$ R-Moduln, $M = M_1 \times \dots \times M_n$ dann bzgl. komponentenweiser Operationen ein R-Modul, das direkte Produkt bzw. (äußere) direkte Summe.
Dann sind $\varepsilon_i: M_i \to M,\ x_i \mapsto (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$
und $\pi_i: M \to M_i,\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ Modul-Hom.

16.6. Def.: Sei M ein R-Modul. Eine nichtleere Teilmenge $N \subseteq M$ heißt ein Teilmodul, falls $\forall x,y \in M\ \forall a \in R$: $x,y \in N \Rightarrow x+y,\ a \cdot x \in N$.

16.7. Bsp.: (11) $0 := \{0\}$ und M sind Teilmoduln von M.
Falls R Körper, so Teilmoduln = Unterräume,
$R = \mathbb{Z}$, so Teilmoduln = Untergruppen,
$R = K[T]$, V ein K-VR, φ ein V-Endo,
so Teilmoduln = φ-invariante URe, d.h. $\varphi(U) \subseteq U$.
⌜$N \subseteq V,\ x \in N \Rightarrow T \cdot x = \varphi(x) \in N \Rightarrow \varphi$ invariant⌟
(12) $\varphi: M \to N$ Hom., dann:
$M' \subseteq M$ Teilmodul $\Rightarrow \varphi(M') \subseteq N$ Teilmodul,
$N' \subseteq N$ Teilmodul $\Rightarrow \varphi^{-1}(N') \subseteq M$ Teilmodul.
Insb.: $\ker\varphi$ und $\operatorname{im}\varphi$ sind Teilmoduln.
(13) Sei R bel. Ring. Die Teilmoduln von R sind genau die Linksideale, d.h. die Teilmengen $\emptyset \neq L \subseteq R$ mit
(i) $x,y \in L \Rightarrow x+y \in L$, (ii) $x \in L, a \in R \Rightarrow ax \in L$.
Falls R komm., sind die Linksideale die Ideale von R.
Falls $R = \mathbb{Z}$, sind UGen = Ideale $n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

(14) $(M_i)_{i\in I}$ Familie von Teilmoduln von $M \Rightarrow \bigcap_{i\in I} M_i$ Teilmodul von M.

16.8. Lemma: Vor.: M ein R-Modul, $N \subseteq M$ Teilmodul.
Beh.: Die Faktorgruppe M/N ist bzgl.

$$R \times M/N \to M/N, \quad (a, x+N) \longmapsto (ax)+N$$

ein R-Modul.
Die Projektion $\pi: M \to M/N$, $x \mapsto x+N$, ist ein Modulhom. mit $\ker\pi = N$. Zu jedem R-Modul-Hom. $\varphi: M \to P$ mit $N \subseteq \ker\varphi$ $\exists!$ Modul-Hom. $\bar\varphi: M/N \to P$ mit $\bar\varphi \circ \pi = \varphi$.

$(N \subseteq \ker\varphi)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & P \\ M/N \arrow[ur, dashed, "\bar\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Bew.: Nur wohldef., d.h. z.z.: $x+N = y+N \Rightarrow ax+N = ay+N$ für alle $a\in R$.
Denn: $x+N = y+N \Rightarrow x-y \in N \Rightarrow a(x-y)\in N \Rightarrow ax-ay\in N \Rightarrow ax+N = ay+N$. $\square$

16.9. Def.: Der Modul M/N heißt Faktormodul von M modulo N.

16.10. Def.: Sei M ein R-Modul, $S \subseteq M$. Dann heißt

$$\langle S\rangle := \bigcap\{P \subseteq M;\ P \text{ Teilmodul},\ P \supseteq S\}$$ der von S erzeugte Teilmodul.

16.11. Bem.: Für $x\in M$ gilt: $x\in\langle S\rangle \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}\ \exists y_1,\dots,y_n\in S\ \exists a_1,\dots,a_n\in R: x = \sum_{i=1}^n a_i y_i$.

16.12. Bsp.: (15) Ein von einem El. erz. Modul heißt zyklisch.
Sei M ein zykl. R-Modul, $M = \langle y\rangle$. Dann ist
$\mu: R\to M$, $a\mapsto ay$, ein surj. R-Modul-Hom.
$\ulcorner \mu(a+b) = (a+b)y = ay+by = \mu(a)+\mu(b)$,
$\mu(c\cdot a) = (ca)y = c(ay) = c\mu(a).\lrcorner$
Somit: $M \cong R/\ker\mu$, wobei $\ker\mu = \{a\in R;\ ay = 0\} =: \mathrm{Ann}(y)$ der Annihilator von y ist. Dieser ist ein Linksideal von R.

> Somit sind die zyklischen Moduln bis auf Isomorphie genau die R-Moduln R/L mit $L\subseteq R$ Linksideal.

16.13. Def.: Sei R Integritätsbereich, M ein R-Modul. $x \in M$ heißt ein Torsionselement, falls $\mathrm{Ann}(x) \neq 0$. $T(M) := \{x \in M;\ x \text{ Torsionsel.}\}$ heißt Torsionsteil von M, M heißt $\left\{\begin{array}{l}\text{Torsionsmodul}\\ \text{torsionsfrei}\end{array}\right\}$, falls $\left\{\begin{array}{l} T(M) = M,\\ T(M) = \{0\}.\end{array}\right.$

16.14. Bem: $T(M)$ ist Teilmodul von M, da $\forall x,y \in M$ mit $ax = 0$, $by = 0$ für $a, b \in R \setminus \{0\}$ gilt: $ab(x+y) = (ab)x + (ab)y = 0 + 0 = 0$, d.h. $x + y \in M$.

16.15. Bsp.: (16) $M/T(M)$ ist torsionsfrei.

⌜Sei $a \neq 0$ mit $a(x + T(M)) = 0$, d.h. $ax + T(M) = 0$ bzw. $ax \in T(M)$. Also ex. $b \neq 0$ mit $(ba)x = 0$, $ba \neq 0$, d.h. $x \in T(M)$.⌟

(17) Sei $(M_i)_{i \in I}$ Familie von Teilmoduln von M, setze $\sum_{i \in I} M_i := \langle \bigcup_{i \in I} M_i \rangle$. Dann gilt: $x \in \sum_{i \in I} M_i$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ \exists i_1, \dots, i_n \in I\ \exists x_1 \in M_{i_1}, \dots, x_n \in M_{i_n}: \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

M heißt die (innere) direkte Summe der M_i, falls
(i) $M = \sum_{i \in I} M_i$, (ii) $\forall i \in I: M_i \cap \sum_{j \in I \setminus \{i\}} M_j = \{0\}$. Notation: $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$.

1. Bem.: (ii) ist äquivalent zu

(ii)': Aus $x_{i_1} + \dots + x_{i_n} = 0$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_n$ paarw. versch., $x_{i_\nu} \in M_{i_\nu}$) folgt stets $x_{i_1} = \dots = x_{i_n} = 0$.

2. Bem.: Sei $I = \{1, \dots, n\}$, $M_1, \dots, M_n \subseteq M$. Dann gilt:

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \Leftrightarrow M_1 \times \dots \times M_n \longrightarrow M,\quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n \text{ ist Modul-Iso.}$$

(18) Sei M ein R-Modul, $L \subseteq R$ ein Linksideal. Setze

$LM := \langle \{ax;\ a \in L, x \in M\} \rangle$.

Jedes $x \in LM$ ist von der Form $x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in L$, $x_1, \dots, x_n \in M$.

* Ist $L = I$ ein (zweiseitiges) Ideal, so ist R/I wieder ein Ring, und M/IM ist in natürlicher Weise ein R/I-Modul bzgl.

$R/I \times M/IM \longrightarrow M/IM$, $(a + I, x + IM) \mapsto ax + IM$,

ist wohldef. ⌜$a - b \in I \Rightarrow bx - ax = (b-a)x \in IM$, d.h. $ax + IM = bx + IM$.⌟

(19) 1. Isomorphiesatz: $N, P \subseteq M$ Teilmoduln $\Rightarrow N/N\cap P \cong (N+P)/P$.

2. Isomorphiesatz: $P \subseteq N \subseteq M$ Teilmoduln $\Rightarrow M/N \cong (M/P)/(N/P)$.

16.16. Def.: Ein R-Modul F heißt frei, wenn es eine Teilmenge $B \subseteq F$ gibt mit:

(i) B erzeugt F, d.h. $\langle B \rangle = F$,

(ii) $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall$ paarw. versch. $y_1, \dots, y_m \in B$ $\forall a_1, \dots, a_m \in R$: $\sum_{i=1}^{m} a_i y_i = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$.

Ein solches B heißt Basis von F.

16.17. Bem.: (i) und (ii) bedeuten, dass jedes $x \in F$ eind. von der Form $x = \sum_{y \in B} a_y y$ ist, mit $a_y \neq 0$ für nur endl. viele $y \in B$.

16.18. Bsp.: (20) $R = K$ Körper, dann ist jeder K-VR frei.

(21) Sei R bel. Ring. Dann ist $R^m = \underbrace{R \times \dots \times R}_{m\text{-mal}}$ freier R-Modul mit Basis $e_1, \dots, e_m$, wobei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ist.
↑ i-te Stelle

(22) Sei S bel. Menge, setze $F_S := \{y : S \to R;\ \{i \in S;\ y(i) \neq 0\} \text{ endl.}\}$,

F_S ist R-Modul. $\ulcorner (y+y')(i) := y(i) + y'(i)$, $(a \cdot y)(i) := a \cdot y(i) \lrcorner$

F_S ist frei mit Basis $\{y_i;\ i \in S\}$, wobei $y_i(j) := \delta_{ij}$.

16.19. Satz: Vor.: F freier R-Modul, Basis B, $\varphi_0 : B \to M$ Abb., M ein R-Modul.

Beh.: $\exists!$ Hom. $\varphi : F \to M$ mit $\varphi_{|B} = \varphi_0$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, hook] & M \\ F \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

16.20. Kor.: Sei M ein R-Modul. Dann $\exists F$ freier R-Modul $\exists \varphi : F \to M$ surj. Hom., d.h. $\exists F$ frei $\exists N \subseteq F : M \cong F/N$.

Bew.: Sei S Erz.system für M, etwa $S = M$. Def. Hom. $\varphi : F_S \to M$ durch $\varphi(s) := s$, dieser ist surj.
Somit: $M \cong F_S/N$ mit $N := \ker \varphi$. $\square$

$$\begin{tikzcd} F_S \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & M \\ F_S/N \arrow[ur, dashed, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

16.21. Kor.: Seien F_i freie R-Moduln mit Basen B_i, $i = 1, 2$.

Beh.: $\# B_1 = \# B_2 \Rightarrow F_1 \cong F_2$.

Bew.: Haben: $F_1 \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} F_2$, zeigen: $\varphi \circ \psi = id_{F_2}$, $\psi \circ \varphi = id_{F_1}$. $\square$

16.22. **Satz:** Vor.: $0 \neq R$ komm. Ring, B_1, B_2 Basen des freien R-Moduls F.
Beh.: $\# B_1 = \# B_2$.

Bew.: (Nur, falls B_1, B_2 endlich) Sei $m := \# B_1$, $n := \# B_2$.
Dann: $R^m \cong F \cong R^n$. Sei I ein maximales Ideal von R.
Dann ist $K := R/I$ ein Körper, ferner sind

$$F/IF \cong \underbrace{R^m/IR^m}_{\substack{\cong (R/I)^m \\ = K^m}} \cong \underbrace{R^n/IR^n}_{\substack{\cong (R/I)^n \\ = K^n}}$$

Isomorphismen von K-VRen, also $K^m = K^n$ und $m = n$. $\square$

16.23. **Bem.:** $L \subseteq R$ Linksideal, $M = N \oplus P$ ein R-Modul.
$\Rightarrow LM = LN \oplus LP$ und $M/LM \cong N/LN \oplus P/LP$.

16.24. **Def.:** Sei F freier R-Modul, R komm.
Die Mächtigkeit einer Basis von F heißt Rang von F.