A6
-1-

Vorlesung Algebra

SoSe'21, hhu
K. Halupczok

Teil I: GRUPPEN

A6: Direkte Summen abelscher Gruppen

Stichworte: Summe und (innere) direkte Summe einer Familie von UGen, freie abelsche Gruppe, Basis einer freien Gruppe, Rang einer freien Gruppe, UGen endl. erz. freier ab. Gr. vom Rang n sind frei vom Rang $\leq n$, UGen endl. erz. ab. Gr. sind endl. erz., torsionsfrei, Torsionsteil, $A = T(A) \oplus F$

6.1. Einleitung: Die direkte Summe von Untergruppen führt zum Begriff der freien abelschen Gruppe und ihrer Basen. Deren (endl.) Kardinalität (bei endl. erz. ab. freien Gr.) sind wie bei Vektorräumen immer gleich und heißt Rang. UGen freier endl. erz. Gruppen sind auch frei von maximal demselben Rang. Damit sind UGen endl. erz. Gruppen auch endl. erz. Freie Gruppen Gruppen sind torsionsfrei. Torsionsfreie Gruppen sind frei, wenn sie endl. erz. sind. Jede endl. erz. ab. Gruppe kann als direkte Summe $A = T(A) \oplus F$ "zerlegt" werden, wo F frei und $T(A)$ Torsionsteil von A.

6.2. Def.: Sei A abelsche Gruppe (additiv geschrieben), $(B_i)_{i\in I}$ Familie von UG von A.

* $\sum_{i\in I} B_i := \langle \bigcup_{i\in I} B_i \rangle = \{ a_{i_1} + \ldots + a_{i_m} ;\ m \in \mathbb{N},\ i_1, \ldots, i_m \in I,\ a_{i_\nu} \in B_{i_\nu} \}$
  heißt Summe der Familie $(B_i)_{i\in I}$.
* A heißt (innere) direkte Summe der $(B_i)_{i\in I}$, falls:
  (i) $A = \sum_{i\in I} B_i$, (ii) $\forall j \in I:\ B_j \cap \sum_{i \in I\setminus\{j\}} B_i = 0$.

  Schreibweise: $A = \bigoplus_{i\in I} B_i$.

6.3. Bem.: $A = \bigoplus_{i\in I} B_i \iff \forall a \in A\ \exists!$ Darst. $a = b_{i_1} + \ldots + b_{i_m}$,
$m \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_m \in I$ paarweise verschieden, $b_{i_\nu} \in B_{i_\nu}$.

6.4. Bem.: $A_1, \ldots, A_m$ bel. abelsche Gruppen, $A := A_1 \times \ldots \times A_m$
"direkte Summe" von $A_1, \ldots, A_m$. Oft: $\bigoplus_{i=1}^{m} A_i$ statt $\prod_{i=1}^{m} A_i$.
Genauer: $A = \bigoplus_{i=1}^{m} A_i'$ mit $A_i' = 0 \times \ldots \times 0 \times A_i \times 0 \ldots \times 0$.

6.5. Bem.: Seien $B_1, \ldots, B_m$ UG von A. Dann:
$A = \bigoplus_{i=1}^{m} B_i \iff \varphi: B_1 \times \ldots \times B_m \longrightarrow A$
$(b_1, \ldots, b_m) \mapsto b_1 + \ldots + b_m$ ist Gruppenisomorphismus.

6.6. **Bem.:** Sei A ab. Gruppe, $r \in \mathbb{Z}$. Dann: $\varphi_r : A \to A,\ a \mapsto ra$

ist Gruppenhomomorphismus

mit $\operatorname{im} \varphi_r = rA = \{ra;\ a \in A\}$,

$\ker \varphi_r = \{a \in A;\ \operatorname{ord}(a) \mid r\}$.

6.7. **Lemma:** Seien $B_1, \dots, B_n$ UG von A. Dann gilt:

(i) $r\left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} rB_i$,

(ii) $A = \bigoplus_{i=1}^{n} B_i \Rightarrow rA = \bigoplus_{i=1}^{n} rB_i$ und $A/rA \cong \prod_{i=1}^{n} B_i/rB_i \left(\overset{6.5}{\cong} \bigoplus_{i=1}^{n} B_i/rB_i \right)$.

Bew.: (i): $r(b_1 + \dots + b_n) = rb_1 + \dots + rb_n$

$\Rightarrow r\left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} rB_i$.

(ii): $\forall j:\ B_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} B_i = 0 \Rightarrow \forall j:\ rB_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} rB_i = 0 \Rightarrow rA = \bigoplus_{i=1}^{n} rB_i$

Ferner: $\varphi : A \xrightarrow[6.5]{\cong} \prod_{i=1}^{n} B_i \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \prod_{i=1}^{n} B_i/rB_i$

$b_1 + \dots + b_n \mapsto (b_1, \dots, b_n) \longmapsto (b_1 + rB_1, \dots, b_n + rB_n)$,

$\ker \varphi = rA$, denn:

$a = b_1 + \dots + b_n \in \ker \varphi \Rightarrow b_i \in rB_i\ \forall i \Rightarrow b_i = rb_i'\ \forall i$

$\Rightarrow a = r(b_1' + \dots + b_n') \in rA$.

Homomorphiesatz:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \prod_{i=1}^{n} B_i/rB_i \\ A/rA \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] \arrow[ur, phantom, "\cong", near start] & \end{tikzcd}$$
$\ker \varphi = rA$.

$\Rightarrow A/rA \cong \prod_{i=1}^{n} B_i/rB_i$. □

6.8. **Def.:** F ab. Gr. heißt frei $:\Leftrightarrow \exists$ Familie $A := (a_i)_{i \in I}$ von El. $a_i \in F$ mit:

(i) $F = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}a_i$ $\quad (\mathbb{Z}a = \{ra;\ r \in \mathbb{Z}\} = \langle a \rangle)$,

(ii) $\forall i \in I:\ \mathbb{Z}a_i \cong \mathbb{Z}$ $\quad$ (d.h. a_i unendl. Ordnung).

Ein solches A heißt Basis von F.

Gilt nur $F = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}a_i$ mit I endlich, so heißt F endlich erzeugt. (kurz: endl. erz.)

6.9. **Bsp.:** $F = \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ mal}}$ ist frei mit Basis $\left((e_i) = \underbrace{(0, \dots, 0, \overset{\text{Stelle } i}{1}, 0, \dots, 0)}_{n \text{ lang}} \right)_{i \in \{1, \dots, n\}}$.

6.10. Satz: Sei F frei mit Basis $A=(a_i)_{i\in I}$. Dann gilt:

$\forall$ Abb. $\varphi_0 : \{a_i;\ i\in I\}\to B$, B ab. Gr., $\exists!$ Hom. $\varphi : F\to B$:

$$\forall i\in I: \varphi(a_i)=\varphi_0(a_i).$$

Bew.:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & B \\ F \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$(\varphi_0=\varphi\circ\iota)$

Def. $\varphi : F=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}a_i \longrightarrow B$, $\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} r_i(\varphi_0 a_i)$, erfüllt $\varphi(a_i)=\varphi_0(a_i)$, ist Hom., eind. nach Def. $\square$

6.11. Kor.: Jede endl. erz. ab. Gr. B ist homomorphes Bild einer freien ab. Gr.

Bew.: Sei $B=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{Z}b_i$, $F:=\mathbb{Z}^n$ (s. Bsp. 6.9).

Def. $\varphi : F\to B$

zu $\varphi_0(e_i):=b_i$. Dann ist φ surjektiver Hom. $\square$

6.12. Satz: Je zwei Basen einer endl. erz. freien ab. Gr. haben gleichviele Elemente.

Bew.: Sei $F=\bigoplus_{i=1}^{m}\mathbb{Z}a_i=\bigoplus_{j=1}^{n}\mathbb{Z}b_j$, die $a_i, b_j\neq 0$, $p\in\mathbb{N}$ prim.

$$\overset{6.7}{\Rightarrow}\ p\Big(\bigoplus_{i=1}^{k}A_i\Big)=\bigoplus_{i=1}^{k}pA_i \quad\text{und}\quad A/pA\cong\prod_{i=1}^{k}A_i/pA_i,$$

also:

$$F/pF\cong\prod_{i=1}^{m}\underbrace{\mathbb{Z}a_i/p(\mathbb{Z}a_i)}_{\cong\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \quad\text{und}\quad F/pF\cong\prod_{j=1}^{n}\underbrace{\mathbb{Z}b_j/p(\mathbb{Z}b_j)}_{\cong\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}.$$

Somit: $\# F/pF=p^m=p^n\Rightarrow m=n.$ $\square$

6.13. Def.: Rang von F: $\operatorname{rg}F:=\#A$, A Basis von F (F endl. erz. fr. ab. Gr.).

6.14. Satz: Jede UG einer endl. erz. fr. ab. Gr. F vom Rang n ist frei und vom Rang $\leq n$.

Bew.: Sei $A \subseteq F$ UG, F frei vom Rang n.

UI nach n: $n=0$: ✓

$n>0$: Basis $a_1, \ldots, a_n$ in F: $F = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} a_i$, und $\pi: F \to \mathbb{Z}$ ← Projektion auf die letzte Koordinate

$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \mapsto r_n$

$\Rightarrow \ker \pi = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z} a_i =: F'$, frei vom Rang $n-1$.

Nach IV ist $A' := F' \cap A$ frei vom Rang $\leq n-1$.

Fall 1: $A = A'$: ✓

Fall 2: $A \neq A'$: $\pi(A) = \mathbb{Z}s$, mit $0 \neq s \in \mathbb{Z}$.

Wähle Basis $b_1, \ldots, b_m$ von A' ($m \leq n-1$),

sowie $b \in A$: $\pi(b) = s$ (beachte: Ordnung von b ist ∞, da $b \in A \subseteq F$, F frei, vgl. Bsp. 6.18)

Beh.: $b_1, \ldots, b_m, b$ ist Basis von A.

Bew.: erz.: $A = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{Z} b_i + \mathbb{Z} b$:

Sei $a \in A$, $\pi a = rs = r \pi b$ für ein $r \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a - rb \in F' \cap A = A' \Rightarrow$ ex. $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{Z}$:

$$a - rb = \sum_{i=1}^{m} r_i b_i. \checkmark$$

frei: Sei $\sum_{i=1}^{m} r_i b_i + rb = 0$

$\Rightarrow \pi(\quad " \quad) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} r_i \underbrace{(\pi b_i)}_{=0} + r \underbrace{\pi(b)}_{=s} = rs = 0$

$\overset{s \neq 0}{\Rightarrow} r = 0 \Rightarrow$ alle $r_i = 0$.

↑ $b_1, \ldots, b_m$ Basis von A'

Somit: $\sum_{i=1}^{m} \mathbb{Z} b_i \cap \mathbb{Z} b = 0$,

also $A = \left(\bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z} b_i \right) \oplus \mathbb{Z} b$. ✓ □

6.15 Kor.: UG endl. erz. ab. Gruppen sind endl. erz.

Bew.: Sei $B \subseteq A = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z} a_i$ UG.

$\overset{6.11}{\Rightarrow}$ Sei $\varphi: F \twoheadrightarrow A$ ein surj. Hom. einer fr. ab. Gr. F von endl. Rang.

$\varphi^{-1}B \hookrightarrow F$, $B \hookrightarrow A$

$\Rightarrow \varphi^{-1} B$ ist UG von F $\overset{6.14}{\Rightarrow}$ $\varphi^{-1} B$ frei von endl. Rang, insb. endl. erz.

$\Rightarrow \varphi(\varphi^{-1}(B)) = B$ ist endl. erz. □

6.16. **Def.:** Eine ab. Gr. heißt torsionsfrei, wenn alle $a \in A \setminus \{0\}$ unendl. Ordnung haben.

6.17. **Bsp.:** $\mathbb{Q}$ bzgl. $+$ ist torsionsfrei ($rq = 0 \Leftrightarrow r = 0$, für $q \neq 0$), aber nicht frei.

Bew.: Ann.: $\mathbb{Q}$ frei, d.h. $\mathbb{Q} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} a_i$, $a_i \in \mathbb{Q}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, also $\mathbb{Q} = Q_1 \oplus Q_2$

mit $Q_1 := \mathbb{Z} a_j$, $Q_2 := \bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} \mathbb{Z} a_i$, UG von $\mathbb{Q}$, $Q_1 \neq 0 \neq Q_2$.

Sei $u \in \mathbb{Z} \cap Q_1$, $u \neq 0$.

Ann.: $v \in \mathbb{Z} \cap Q_2$, $v \neq 0 \Rightarrow Q_1 \ni \underbrace{vu}_{\neq 0} = uv \in Q_2$ ↯.

Also: $\cancel{0 =}\ \mathbb{Z} \subseteq Q_1$.

Sei $0 \neq \frac{p}{q} \in Q_2 \Rightarrow 0 \neq q \cdot \frac{p}{q} = p \in Q_2 \cap \mathbb{Z} \subseteq Q_2 \cap Q_1$, ↯. □

6.18. **Bsp.:** Freie Gruppen sind torsionsfrei.

Bew.: Sei F frei, $(a_i)_{i \in I}$ Basis von F: $F = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} a_i$,

sei $a := \sum_{i=1}^{n} r_i a_i \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$.

Ann.: $0 = ra = \sum_{i=1}^{n} (r r_i) a_i \Rightarrow \forall i: r r_i = 0 \Rightarrow r = 0$. □

6.19. **Satz:** Endl. erz. torsionsfreie ab. Gr. sind frei.

Bew.: Sei $A = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z} a_i$ torsionsfrei, $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ maximal mit $B := \sum_{i \in I} \mathbb{Z} a_i$ frei mit Basis $(a_i)_{i \in I}$.

Beh.: $\forall 1 \leq j \leq n\ \exists r_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}: r_j a_j \in B$.

Bew.: Sonst sei j Gegenbsp. $\Rightarrow j \notin I$ und $B + \mathbb{Z} a_j = \left(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} a_i \right) \oplus \mathbb{Z} a_j$

($\mathbb{Z} a_j \cap B = 0$, da $\forall r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}: r a_j \notin B$). $I \cup \{j\}$ ↯ Maximalität von I. ⌟

Setzen $r := \prod_{j=1}^{n} r_j \neq 0 \Rightarrow \forall 1 \leq j \leq n: r a_j \in B$, also $rA \subseteq B$.

$\varphi: A \to B$, $a \mapsto ra$ ist injektiv (da A torsionsfrei) $\Rightarrow A \cong rA \subseteq B$ ist frei nach 6.14. □

6.20. **Def.:** Sei A eine ab. Gruppe. $T(A) := \{a \in A;\ \exists r \in \mathbb{Z}: (r \neq 0 \text{ und } ra = 0)\}$

heißt Torsionsteil von A.

6.21. **Lemma:** $T(A)$ ist UG von A (NT ✓, da A abelsch)

Bew.: $a, b \in T(A)$, d.h. $ra = 0 = sb$ mit $r, s \neq 0$, insb. $rs \neq 0$

$\Rightarrow rs(a - b) = s(ra) - r(sb) = 0 \Rightarrow a - b \in T(A)$. □

6.22. Satz: Jede endl. erz. ab. Gr. A ist direkte Summe $\boxed{A = T(A) \oplus F}$, mit F frei.

Bew.: Sei $\pi : A \twoheadrightarrow A/T(A) =: B$ die Projektion nach $T(A)$.

B ist endl. erz., da A endl. erz.; B torsionsfrei, denn:

⌜ $b = \pi(a) \in B$ mit $nb = 0 = \pi(na)$, $n \neq 0$

$\Rightarrow na \in \ker \pi = T(A) \Rightarrow$ ex. $m > 0$: $\underbrace{mn}_{\neq 0} a = 0$

$\Rightarrow a \in T(A) \Rightarrow b = \pi(a) = 0$. ⌟

Somit: B frei nach 6.19.

Seien $a_1, \dots, a_n \in A$: $\pi a_1, \dots, \pi a_n$ Basis von B.

Setze $F := \mathbb{Z} a_1 + \dots + \mathbb{Z} a_n$,

ist frei mit Basis $a_1, \dots, a_n$, denn:

$\sum_{i=1}^n r_i a_i = 0 \Rightarrow \pi\left(\sum_{i=1}^n r_i a_i\right) = 0 = \sum_{i=1}^n r_i \pi(a_i) \Rightarrow$ alle $r_i = 0$.

Es gilt: $A = T(A) \oplus F$:

* $T(A) \cap F = 0$ ✓
* $T(A) + F = A$:

⌜ Sei $a \in A \Rightarrow \exists r_1, \dots, r_n$: $\pi a = \sum_{i=1}^n r_i (\pi a_i)$

$\Rightarrow \underbrace{a - \sum_{i=1}^n r_i a_i}_{=: a'} \in \ker \pi = T(A)$

$\Rightarrow a = \underbrace{a'}_{\in T(A)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n r_i a_i}_{\in F}$.

□