Vorlesung Algebra

SoSe'21, hhu
K. Halupczok

Teil I: GRUPPEN

A9: Sylowgruppen

Stichworte: Gruppenoperationen und Klassengleichung bzgl. Konjugation, p-Gruppe, Normalisator, p-Sylowgruppe, Sylowsätze, Beweis der Sylowsätze

---

9.1. Einleitung: Wir erinnern an Gruppenoperationen, und im Spezialfall der Konjugation an die Klassengleichung. Wir zeigen hier als Anwendung die Sylowsätze über p-Sylowgruppen, den maximalen p-Untergruppen einer Gruppe: Deren Anzahl ist $\equiv 1 \bmod p$, je zwei p-Sylowgr. sind konjugiert, deren Anzahl teilt $\#G$, und jede p-UG ist in einer p-Sylowgruppe enthalten.

9.2. Def.: Sei G endl. Gruppe, X endl., G operiere auf X,
d.h. $T: G \times X \to X$, $(a,x) \mapsto a\cdot x$ erfüllt (i) $(ab)x = a(bx)$, (ii) $ex = x$ $\forall x \in X$,
dann ist $T: G \to \mathrm{Perm}(X)$ Gruppenhom.

9.3. Bem.: Haben Bahnenzerlegung $X = X_1 \dot\cup \ldots \dot\cup X_n = Gx_1 \dot\cup \ldots \dot\cup Gx_n$,
ferner $\#X = \sum_{i=1}^{n} \#Gx_i = \sum_{i=1}^{n} [G : \mathrm{Iso}(x_i)]$ mit $\mathrm{Iso}(x) := \{a \in G;\ ax = x\}$
Speziell: $X := G$, T = Konjugation, dann $\#G = \#Z(G) + \sum_{i=1}^{s} \underbrace{[G : Z(x_i)]}_{>1}$
(Klassengleichung),
wobei $Z(G) := \{a \in G;\ \forall b \in G : ab = ba\}$ Zentrum von G,
und $Z(x) := \{a \in G;\ ax = xa\}$ Zentralisator von x.

9.4. Def.: Für $p \in \mathbb{N}$ prim heißt G eine p-Gruppe, falls $\#G$ Potenz von p.

9.5. Bem.: p-Gruppen $\neq e$ haben ein Zentrum $\neq e$ (laut A3.18)

9.6. Def.: Sei G Gruppe, $H \leq G$ UG. Dann heißt
$N(H) := \{a \in G;\ aHa^{-1} = H\}$ der Normalisator von H.

9.7. Bem.: $N(H)$ ist die größte UG von G, in der H ein NT ist.

9.8. Def.: Sei G endl. Gruppe, $p \in \mathbb{N}$ prim, $\#G = p^k \cdot m$ mit $p \nmid m$. (kurz: $p^k \| \#G$)
Eine p-Sylowgruppe von G ist eine UG P der Ordnung p^k.

9.9. Satz von Sylow: Sei G endl. Gruppe, $p \in \mathbb{N}$ prim. Dann gilt:
(i) Es gibt p-Sylowgruppen von G.
(ii) Je zwei p-Sylowgruppen von G sind konjugiert,
d.h. $\exists a \in G$ mit $P' = aPa^{-1}$ für p-Sylowgruppen P und P',
die Anzahl der p-Sylowgruppen ist $\equiv 1 \pmod p$ und teilt $\#G$ (bzw. m in 9.8).
(iii) Jede p-UG ist in einer p-Sylowgruppe von G enthalten.

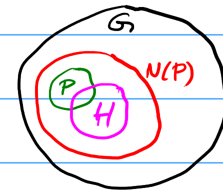
9.10. Bem.: Klar für abelsche Gruppen wegen: $A \underset{HS}{\cong} \mathbb{Z}/(p_1^{e_1}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(p_n^{e_n})$ mit $p \mid \#A = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$;
dann ist $\sum_{p_i = p} \mathbb{Z}/(p_i^{e_i})$ eine p-Sylowgruppe in A, und eindeutig.
⌜HS = Hauptsatz über endl. erz. ab. Gruppen⌟

9.11. Bew. von 9.9(i): VI nach $\#G = p^k \cdot m$ mit $p \nmid m$. Sei $G \neq e$ und OE $k \geq 1$ ⌜sonst Beh. ✓⌟.
Klassengl.: $\#G = \#Z(G) + \sum_{i=1}^{s} \underbrace{[G : Z(x_i)]}_{>1}$, OE $s > 0$ (sonst G abelsch, dann 9.10).

Fall 1: $\exists i : p \nmid [G : Z(x_i)]$.
Wegen $\#G = \#Z(x_i) \cdot [G : Z(x_i)]$ folgt $p^k \mid \#Z(x_i)$,
nach IV $\exists$ p-Sylowgruppe von $Z(x_i)$ bzw. von G.

Fall 2: $\forall i : p \mid [G : Z(x_i)]$, also: $p \mid \#Z(G)$.
Da $Z(G)$ endl. ab. Gruppe, ex. $e \neq a \in Z(G) : a^p = e$
("Satz von Cauchy", wegen Bem. 9.10: Betr. einen direkten Summanden $\mathbb{Z}/(p^t)$ von $Z(G)$,
wähle $c \in \mathbb{Z}/(p^t)$, $c \neq e$, mit $\operatorname{ord}(c) = p^t$, so dass $(c^{p^{t-1}})^p = c^{p^t} = e$, d.h. $c^{p^{t-1}}$ entspricht
einem $a \neq e$ in $Z(G)$ mit $a^p = e$.)
Setze $H := \langle a \rangle \subseteq G$, ist NT in G, da $H \subseteq Z(G)$.
Dann hat $\bar{G} := G/H$ die Ordnung $p^{k-1} \cdot m < \#G$.
IV liefert eine p-Sylowgruppe $\bar{P}$ von $\bar{G}$ mit $\#\bar{P} = p^{k-1}$.
Betr. $\pi : G \twoheadrightarrow \bar{G}$, $a \mapsto aH$, hat Kern H mit $\#H = p$.
Setze $P := \pi^{-1}(\bar{P})$, hat Ordnung $\#H \cdot \#\bar{P} = p^k$,
d.h. P ist p-Sylowgruppe von G. $\square$

9.12. <u>Lemma</u>: Sei P eine p-Sylowgruppe von G, dann ist jede p-UG $H \subseteq N(P)$ enthalten in P.



<u>Bew:</u> Betr. $\pi: N(P) \twoheadrightarrow N(P)/P$. Da $p \nmid \#(N(P)/P)$ und $\#\pi(H)$ p-Potenz, ist $\pi(H) = e$, also $H \subseteq \ker \pi = P$. $\square$

9.13. <u>Bew. von 9.9 (ii)</u>: Betr. $\Pi := \{P \subseteq G;\ P\ p\text{-Sylowgr. von } G\}$, ⌜Beweis erfordert (i), damit $\Pi \neq \emptyset$⌟

G op. auf Π vermöge Konjugation $\quad G \times \Pi \to \Pi$

$(a, P) \mapsto aPa^{-1}$.

z.z.: Π besteht aus <u>einer</u> Bahn bzgl. Konjugation.

Sei $\Pi = \Pi_1 \dot\cup \ldots \dot\cup \Pi_n$ die Bahnenzerlegung von Π, z.z.: $n = 1$.

Sei $Q \in \Pi$, Q op. auf Π_1 vermöge $Q \times \Pi_1 \to \Pi_1$

$(q, gP_1g^{-1}) \mapsto (gq)P_1(gq)^{-1}$.

Π_1 zerfällt unter der Op. von Q in Bahnen $\Pi_1 = \Sigma_1 \dot\cup \ldots \dot\cup \Sigma_s$.

* <u>Beh.:</u> (a) $Q \in \Sigma_i \Rightarrow \#\Sigma_i = 1$,

(b) $Q \notin \Sigma_i \Rightarrow p \mid \#\Sigma_i$.

<u>Bew.:</u> (a): klar, da $\Sigma_i = \{qP'q^{-1};\ q \in Q\}$ für ein $P' \in \Pi_1$.

(b): Sei $P \in \Sigma_i$, dann ist $\#\Sigma_i = [Q : Iso(P)]$ Potenz von p,

wobei $Iso(P) = \{a \in Q;\ aPa^{-1} = P\} = \underbrace{N(P)}_{\text{in } G} \cap Q \subseteq Q$.

Noch z.z.: $\#\Sigma_i > 1$:

Falls $\#\Sigma_i = 1$, ist $N(P) \cap Q = Q$, also $Q \subseteq N(P)$.

Mit Lemma 9.12 folgt $Q \subseteq P$ für die p-Sylowgruppen P, Q, also $P = Q$ ↯.

* <u>Ann.:</u> $n > 1$. Wählen $Q \in \Pi_1$, so folgt aus (a)&(b), dass $\#\Pi_1 \equiv 1 \pmod p$.

Wählen $Q \in \Pi_2$, so folgt aus (a)&(b), dass $\#\Pi_1 \equiv 0 \pmod p$.

Also ist $n = 1$, $Q \in \Pi_1$ und $\#\Pi = \#\Pi_1 \equiv 1 \pmod p$. ↯.

* Sei $\Pi = \{P_1, \ldots, P_r\}$, wobei also je zwei der p-Sylowgruppen in Π (zu P_1) konjugiert sind.

Für $a, b \in G$ gilt $aP_1a^{-1} = bP_1b^{-1} \Leftrightarrow a^{-1}bP_1(a^{-1}b)^{-1} = P_1 \Leftrightarrow a^{-1}b \in N(P_1)$

$\Leftrightarrow b \in aN(P_1) \Leftrightarrow aN(P_1) = bN(P_1)$ in $G/N(P_1)$. Die Anzahl r der (zu P_1) konjugierten p-Sylowgruppen stimmt also mit $\#(G/N(P_1)) = [G : N(P_1)] = \frac{\#G}{\#N(P_1)}$ überein und teilt somit $\#G$. (Mit $\#G = p^k m$, $p^k \| \#G$, und $r \equiv 1 (p)$ folgt $r \mid m$.) $\square$

9.14. Lemma: Sei H eine p-Gruppe, die auf X operiert, X endlich, dann ist die Anzahl der Fixpunkte von H stets $\equiv \# X \pmod p$.

Bew.: Die Bahnengleichung liefert $\# X = \sum_{i=1}^{m} [H : \mathrm{Iso}(x_i)]$, für jeden Fixpunkt x_i gilt $\mathrm{Iso}(x_i) = \{g \in H;\ g x_i = x_i\} = H$, und falls x_i nicht fix ist, gilt $p \mid [H : \mathrm{Iso}(x_i)]$. Also: $\#\text{Fixpunkte} \equiv \# X \pmod p$. $\square$

9.15. Bew. von 9.9 (iii): Sei H eine p-UG von G, dann op. H auf Π vermöge Konjugation. Wegen Lemma 9.14 und 9.9.(ii) ist $\#\text{Fixpkt.} \equiv \#\Pi \pmod p \equiv 1 \pmod p$, d.h. es ex. ein Fixpkt., etwa $Q \in \Pi$, d.h. $\forall h \in H: hQh^{-1} = Q$, also $H \subseteq N(Q)$. Mit Lemma 9.12 folgt $H \subseteq Q$, einer p-Sylowgruppe von G. $\square$