A17: Endlich erzeugte Moduln über HIBen

R-Modul, R ist HIB

17.1. Einleitung: HS über e.e. ~~ab. Gruppen~~
" Moduln über HIBen

$\bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_i$

Vereinbarung: Alle Moduln sind welche über HIBen!

17.2. Satz: Jeder Teilmodul M eines e.e. freien A-Moduls F über HIB A ist frei mit $\text{Rang}\, M \leq \text{Rang}\, F$. ⌜wie bei A6.14⌟

17.3 Kor.: Jeder Teilmodul eines e.e. A-Moduls (A HIB) ist e.e.
Bew.: $\pi: F \twoheadrightarrow M \supseteq N$ nach A16.20, dabei $\pi(\pi^{-1}(N)) = N$ und $\pi^{-1}(N)$ ist also frei vom Rang $\leq$ Rang F, ist also e.e. □

17.4 Satz: Jeder e.e. torsionsfrei A-Modul ist frei. ⌜wie bei A6.19⌟

17.5 Kor.: Jeder e.e. A-Modul M ist innere direkte Summe $M = T(M) \oplus F$, $\underbrace{F \text{ frei}}_{(\cong R^m)}$.
⌜Zunächst torsionsfrei mit A16.15 Bsp. (16), dann 17.4⌟

17.6. Def.: Sei A HIB, $p \in A$ prim, M ein A-Modul.
Dann heißt $M_p := \{x \in M;\ \exists r \in \mathbb{N}: p^r \cdot x = 0\}$
der p-Torsionsteil von M. M heißt p-Modul, falls $M = M_p$.

17.7. Bem.: $M_p \subseteq T(M)$ Teilmoduln, $0 \neq x \in M_p \Rightarrow \text{Ann}(x) \underset{A \text{ HIB}}{=} (p^m)$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

⌜$\text{Ann}(x) = \{a \in A;\ ax = 0\}$ Annihilator⌟

Ferner: $T(M) = M = \bigoplus\limits_{p \text{ prim}} M_p$.

17.8 Satz: Sei M ein A-Torsionsmodul und $\mathcal{P}$ ein Repr.system für die primen Assoziiertheitsklassen ⌜d.h. $a \sim b :\Leftrightarrow \exists u \in A^\times: au = b$⌟.
Dann: $M = \bigoplus\limits_{p \in \mathcal{P}} M_p$.
⌜wie bei A7.12⌟

17.9. Bsp.: Sei $M = Ax \neq 0$ ein zykl. p-Modul, $p \in A$ prim.
Dann ist $\mu: A \twoheadrightarrow M$, $a \mapsto ax$ surj. Modul-Hom. mit Kern $\text{Ann}(x) = (p^r)$ für ein $r \in \mathbb{N}$.
Es folgt: $M \cong \underline{A/(p^r)}$ $[\Rightarrow p^i M \cong A/(p^{r-i}),\ i = 0, \ldots, r]$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\mu"] \arrow[d] & M \\ A/\text{Kern}\,\mu \cong A/(p^r) \arrow[ur, dashed, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

17.10. Satz: Sei $p \in A$ prim. Jeder e.e. p-Modul ist innere dir. Summe von zyklischen Moduln: $M = \bigoplus_{i=1}^{m} Ay_i$ mit $y_1, \ldots, y_m \in M \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, eind. best., ebenso die Folge $(\underbrace{\mathrm{Ann}(y_1)}_{=(p^{e_1})}, \ldots, \underbrace{\mathrm{Ann}(y_m)}_{=(p^{e_m})})$ bis auf Perm. ihrer Glieder.

↳ die $Ay_i \cong A/(p_i^{r_i})$

Bew.: (i) Ex.: VI nach m, wo M von m vielen El. erz. wird
→ M von gewünschter Form (vgl. A 7.14)

(ii) Eind.: VI nach r mit $p^r M = 0$, r minimal.
→ nochmaliges "mal p und mod p rechnen"
führt die Frage zurück auf Eind. der Dimension von VRen
$M/pM \Rightarrow A/(p)$ ist Körper □

17.11. Bem.: In der Darst. von 17.10 ist $Ay_i \cong A/(p^{r_i})$ nach 17.9.

17.12. Hauptsatz über endl. erz. Moduln über einem HIB:
Sei A ein HIB. Dann ist jeder e.e. A-Modul M von der Gestalt $M \cong A^n \oplus \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \bigoplus_{i=1}^{m(p)} A/(p^{r_i}) = A^n \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} A/(p_i^{r_i})$, wobei $n \in \mathbb{N}$ eind. best.
Ebenso ist die Folge $(p_1^{r_1}, \ldots, p_m^{r_m})$ von Primpotenzen $p_i^{r_i} \in A$ (die $p_i \in A$ prim, $r_i \geq 1$) bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit ihrer Glieder eind. best.

17.13. Anwendung: VR mit Endomorphismen $[= \underbrace{K[T]}_{\text{ist HIB}}\text{-Moduln}]$
endl. dim. ; e.e.

Sei K Körper, V endl. dim. K-VR, φ Endo von V,
dann: V ist $K[T]$-Modul vermöge $T \cdot v := \varphi(v)$,
d.h. $\left(\sum_{i=0}^{r} a_i T^i\right) \cdot v = \sum_{i=0}^{r} a_i \varphi^i(v)$.

* V ist endl. erz. $K[T]$-Torsionsmodul.

⌈ Jede K-Basis erz. V. Sei ferner $v \in V$, $v \neq 0$, $n := \dim_K V$.
Dann sind $v, Tv, T^2 v, \ldots, T^n v$ K-lin. abh.,
d.h. $\sum_{i=0}^{n} a_i (T^i v) = 0$ für $a_i \in K$, nicht alle $= 0$,
d.h. v Torsionselement (bzgl. Pol. $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i \neq 0$). ⌋

* Spezialfall: Sei V zykl., d.h. $V = K[T] \cdot v \cong K[T]/(f)$,
mit $(f) = \mathrm{Ann}(v)$, OE f normiert.
Dann bildet $\mathcal{B} : (v, Tv, \ldots, T^{n-1} v)$ eine K-Basis von V.
⌈ Sei $\sum_{i=0}^{n-1} b_i (T^i v) = 0 = \Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} b_i T^i}_{\in \mathrm{Ann}(v) = (f)}\Big)(v)$,
$\deg \text{''} = n-1 < n$, $\deg f = n$

d.h. $\sum_{i=0}^{n-1} b_i T^i = 0$, weil $n = \dim V = \deg(f)$. Also sind alle $b_i = 0$. ⌋

Sei $f = T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0$.
Es gilt:
$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} =: A, \qquad (*)$$
da $\varphi(T^{n-1} v) = T^n v = -a_{n-1} T^{n-1} v - \ldots - a_1 T v - a_0 v$,

$$\varphi(T^i v) = 1 \cdot T^{i+1} v \quad \text{für } i < n-1.$$

Für das char. Pol. P_φ gilt:
$P_\varphi(T) = \det(-A + T E_n) = \det(-M_{\mathcal{B}}(\varphi) + T E_n) = \det(T E_n - A)$
[bzw. $\det(A - T E_n)$] $= f(T)$.

* Allg. Fall: Nach $\boxed{\text{HS 17.12}}$ gilt $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$,
die zykl. $V_i = K[T] v_i \cong K[T]/(p_i^{e_i})$, $p_i \in K[T]$ irred.,
seien $f_i := p_i^{e_i}$ und $(p_i^{e_i}) = \mathrm{Ann}(v_i)$, die f_i normiert.

Dann: $V = K[T]v_1 \oplus \ldots \oplus K[T]v_r$.

Die Matrix von φ bzgl. einer geeign. Basis $\mathcal{B}$ ist

$$A := M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix},$$ die A_i von der Form ⊛.

⌈Wende Spezialfall auf $\varphi_{\restriction V_i}$⌋

Die Darstellung heißt rationale Normalform

⌈auch: Verallg. Jordansche Normalform⌋

wieder gilt: $P_\varphi(T) = \det(T\mathbb{1}_n - A) = f_1 \cdots f_r = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$,

dabei $(f_1 \cdots f_r)v_i = 0$ für alle i, also $P_\varphi(V) = (f_1 \cdots f_r)V = 0$.

$\hookrightarrow \underbrace{P_\varphi(T) \cdot v}_{= P_\varphi(\varphi)(v)} = 0$ für alle $v \in V$.

Somit: Satz von Cayley(-Hamilton): $P_\varphi(\varphi) = 0$ $(= 0\text{-Endo})$.

* Sei $K = \mathbb{C}$: Dann sind die p_i linear, etwa $p_i = T - b_i$.

⌈HS der Algebra: $\mathbb{C}$ alg. abg., s. A23.13⌋

Ferner ist $V = K[T]v_i \cong K[T]/((T-b_i)^{e_i})$.

Es ist $\mathcal{B}_i := (v_i, (T-b_i)v_i, (T-b_i)^2 v_i, \ldots, (T-b_i)^{e_i - 1} v_i)$ Basis von V_i.

Es ist $$M_{\mathcal{B}}(\varphi_{\restriction V_i}) = \begin{pmatrix} b_i & & & 0 \\ 1 & b_i & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 & \boxed{b_i} \end{pmatrix},$$ da $\varphi(v_i) = T \cdot v_i = (T-b_i)v_i + b_i v_i$,

und $\varphi((T-b_i)v_i) = T(T-b_i)v_i = 1 \cdot (T-b_i)^2 v_i + b_i (T-b_i)v_i$, ...

$\varphi((T-b_i)^{e_i-1}v_i) = \underbrace{(T-b_i)^{e_i}v_i}_{=0} + b_i (T-b_i)^{e_i-1}v_i$ für letzte Sp.

Das ist die Jordansche Normalform.