

-2-

3.19. Lemma: $\# G = p^2 \Rightarrow G$ abelsch. (p prim)

Bew.: Ann.: G nicht ab. $\stackrel{3.18.}{\Rightarrow} \# Z(G) = p \stackrel{A2.19}{\Rightarrow} Z(G)$ zyklisch,
da $\# Z(G) \mid p^2$ sei $Z(G) = \langle a \rangle$.

Sei $b \in G \setminus Z(G)$.

Dann: $Z(G) \neq \langle a, b \rangle \subseteq G$

Da: $p < \# \langle a, b \rangle \mid \# G = p^2 \Rightarrow \# \langle a, b \rangle = p^2$
 $\Rightarrow \langle a, b \rangle = G$

Weil $a \in Z(G)$, ist $ab = ba$. $\Rightarrow G$ doch abelsch. $\square$

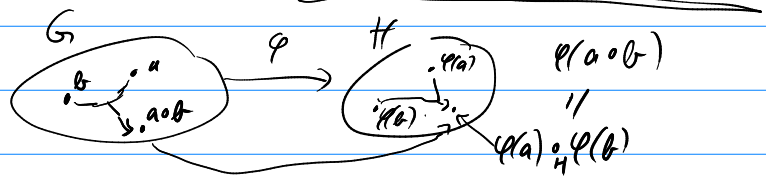
A4: Gruppenhomomorphismen

4.1. Eial.: Gr. hom., UG von $\text{Perm}(X)$ heißt Perm. gr., Hom. Satz, alle zykl. Gruppen "klassifiziert"

4.2. Def.: Sei G, H Gruppen. $\varphi: G \rightarrow H$ Homomorphismus

$\downarrow \varphi, e_G \quad \downarrow \varphi, e_H$

$\Leftrightarrow \forall a, b \in G: \varphi(a \circ_G b) = \varphi(a) \circ_H \varphi(b)$



4.3. Bem.: $\varphi(e_G) = e_H$, da $\forall a \in G: \varphi(e_G) \circ_H \varphi(a) = \varphi(e_G \circ_G a) = \varphi(a) \quad (\circ \varphi(a)^{-1})$

$\Leftrightarrow \varphi(e_G) = e_H$

4.4. Def.: $\varphi: G \rightarrow H$ Hom. heißt Isomorphismus: $\neq$

$\exists \psi: H \rightarrow G$ Hom.: $\varphi \circ \psi = \text{id}_H$ und $\psi \circ \varphi = \text{id}_G$.

Ein Gr. isom. zw. G und H "identifiziert" G mit H ,
"bis auf Isomorphie"

4.5. Bem.: Sei $\varphi: G \rightarrow H$ Hom. Dann:

φ Isom. $(\Leftrightarrow)$ φ bijektiv. ($\text{im } \varphi = H \wedge \text{Ker } \varphi = \{e\}$)

Bew.: " $\Rightarrow$ ": $\forall h \in H: h = \varphi \circ \varphi^{-1}(h) = \varphi(\varphi^{-1}(h))$, d.h. φ surj.

$\forall g_1, g_2 \in G: \varphi(g_1) = \varphi(g_2) \Rightarrow \varphi^{-1} \circ \varphi(g_1) = \varphi^{-1} \circ \varphi(g_2) \Rightarrow g_1 = g_2$,
d.h. φ inj.

" $\Leftarrow$ ": $\forall h \in H \exists! g \in G: \varphi(g) = h$,

daher setze $\varphi^{-1}(h) := g$, $\varphi^{-1}: H \rightarrow G$.

Dabei $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_H$, $\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}_G$.

Ferner φ^{-1} Hom., denn:

$$\forall h_1, h_2 \in H: \varphi^{-1}(h_1 \circ h_2) \stackrel{!}{=} g_1 \circ g_2 = \varphi^{-1}(h_1) \circ \varphi^{-1}(h_2)$$

$\uparrow$
 $h_1 = \varphi(g_1), h_2 = \varphi(g_2)$

$$\text{d.h. } \varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2) = h_1 \circ h_2$$

$$\text{also } \varphi^{-1}(h_1 \circ h_2) = g_1 \circ g_2$$

□

4.6. Def.: Hom. (bzw. Isom.) $\varphi: G \rightarrow G$, heißen Endom. (bzw. Autom.).

4.7. Bsp.: $\text{Hom}(G, H) := \{\varphi: G \rightarrow H \text{ Hom.}\}$

$\text{Iso}(G, H) := \{\varphi: G \rightarrow H \text{ Iso}\}$

$\text{End}(G)$

$\text{Aut}(G)$

$$\text{End}(G) = \text{Hom}(G, G), \quad \text{Aut}(G) = \text{Iso}(G, G)$$

4.8. Bsp.: $\varphi_1: G \rightarrow G$ und $\varphi_2: G \rightarrow G$
 $a \mapsto e$ id_G $a \mapsto a$ sind Hom.
Isom.

4.9. Bsp.: $\varphi: G \rightarrow G'$ Hom.
 $\varphi': G' \rightarrow G''$ Hom.
 $\varphi' \circ \varphi: G \rightarrow G''$ Hom.
 $\varphi' \circ \varphi = \varphi' \circ \varphi$

4.10. Bsp.: $\text{Aut}(G)$ ist UG von $\text{Perm}(G) := \{\sigma: G \rightarrow G; \sigma \text{ bij.}\}$
 $\varphi, \psi \in \text{Aut}(G) \Rightarrow \varphi \psi^{-1} \in \text{Aut}(G)$

4.11. Bsp.: Sei A ab. Gr., $m \in \mathbb{N}$. $\varphi: A \rightarrow A, a \mapsto a^m$ Endom.

Bew.: $\forall a, b \in A: (ab)^m = a^m b^m$. $\square$
 A abelsch

$$(\mathbb{R}, +, 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot, 1)$$

4.12. Bsp.: $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$a \mapsto \exp(a)$$

inj. Hom., $\text{im } \varphi = \mathbb{R}_{>0}$

$$\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$$

Umkehrabb.: $\varphi^{-1}: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$

$$b \mapsto \ln(b)$$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

4.13. Bsp.: K sei Körper, V ein K -VR, $\dim V = n$. Sei $\mathcal{A} := (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V .

$$\text{Dann: } \text{Aut}_K(V) \longrightarrow GL(n, K)$$

$$f \mapsto M_{\mathcal{A}}(f) \hat{=} \text{Matrixdarst.}$$

$$M_{\mathcal{A}}(fg) = M_{\mathcal{A}}(f) \cdot M_{\mathcal{A}}(g)$$

ist Gruppenisom.

4.14. Bsp.: $\varphi: GL(n, K) \rightarrow K^*$

$$A \mapsto \det(A),$$

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ ist surj. Hom.

mit $\ker \varphi = SL(n, K)$ ("spez. lin. Gr.", $\det = 1$)

4.15. Bsp.: Seien $G_1, \dots, G_m$ Gruppen, $\pi_i: G_1 \times \dots \times G_m \rightarrow G_i$

$$(a_1, \dots, a_m) \mapsto a_i$$

ist surj. Hom. („Projektionen“)

4.16. Bsp.: $l: G \rightarrow \text{Perm}(G)$

$$= a \mapsto l_a, \quad \text{Linkstransl. } G \rightarrow G, b \mapsto l_a(b) := ab$$

ist inj. Hom.,

$$\text{denn: Hom.: } l_a \circ l_b = l_{ab} \checkmark$$

$$\text{inj.: } l_a = \text{id}_G \Rightarrow \underbrace{l_a(e)}_{ae} = e \Rightarrow a = e$$

$$A(\varphi) = \ker l = \{e\} \sim \checkmark$$

4.17. Def.: $G \subseteq \text{Perm}(X) \cup G$, dann heißt G Permutationsgruppe.

4.18. Satz: Jede Gruppe G ist isom. einer Perm. gr. ("ist bis auf Isomorphie")

Bew.: Nach 4.16: $G \cong \text{im}(\ell) \subseteq \text{Perm}(G)$,

und $\text{im}(\ell) \cup G$, da ℓ inj. $\square$

4.19. Bsp.: Sei G Gr., X Menge, $T: G \times X \rightarrow X$, $(a, x) \mapsto T_a(x)$ Abb.

T Gruppenop. $(=) \varphi: G \rightarrow \text{Perm}(X)$

$a \mapsto T_a$ Gruppenhom.

✓

4.20. Bsp.: Sei $a \in G$. Die konj. mit a : $\eta_a: G \rightarrow G$

$b \mapsto aba^{-1}$

ist Autom. von G ,

denn $\eta_a(bc) = a b c a^{-1} = (a b a^{-1}) (a c a^{-1}) = \eta_a(b) \eta_a(c)$,

$\eta_a \circ \eta_{a^{-1}}(b) = a (a^{-1} b a) a^{-1} = b = \eta_{a^{-1}} \circ \eta_a(b)$.

✓

4.21. Homomorphiesatz:

Vor.: G Gr., $N \subseteq G$ NT

Beh.: (i) $\pi: G \rightarrow G/N$

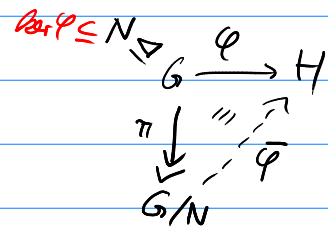
$a \mapsto aN$ "Proj." zu N

ist surj. Gr.hom., $\ker \pi = N$

(ii), univ. Eigensch.:

$\forall \varphi \in \text{Hom}(G, H)$, H Gr., $N \subseteq \ker \varphi$

$\exists! \bar{\varphi}: \text{Hom}(G/N, H): \bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$.



Zusatz: (α) $\text{im } \bar{\varphi} = \text{im } \varphi$

(β) $\bar{\varphi}$ inj. $(=) \ker \varphi = N$

(γ): (α) $\wedge$ (β) $\Rightarrow$

$$\boxed{\text{im } \varphi \cong G / \ker \varphi}$$

- 6 -

→ Ans.: Satz 4.23: G zykl. $\Rightarrow \begin{cases} \#G = \infty \Rightarrow G \cong \mathbb{Z} \\ \#G = r \in \mathbb{N} \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}r \end{cases}$
↑