Weiter zu A5: $S_n = \{ \sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \text{ bij.} \}$

$\hookrightarrow$ Zyklenschreibweise: $(i_1\ i_2 \dots i_m) = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ i_2 & i_3 & & i_1 \end{pmatrix}$

5.13. Def.: Signum: $\mathrm{sgn} : S_n \to \{1, -1\}$

$$\sigma \longmapsto \mathrm{sgn}(\sigma) := \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

$i, j \in \{1,\dots,n\}$

$i<j$ sorgt dafür, dass Paar $\{i,j\} = \{j,i\}$ genau einmal vor,

beachten: $\dfrac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j-i} = \dfrac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i-j}$

wohldef.: $\{k,l\} \longmapsto \{\sigma(k), \sigma(l)\}$

Zähler: $\pm(\sigma(k) - \sigma(l))$

Nenner: $\sigma(k) - \sigma(l)$

5.14. Lemma: (i) sgn ist Gr. hom.

(ii) $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$, falls $\sigma$ Transp.

(iii) $\mathrm{sgn}(\varrho) = (-1)^{r-1}$, falls $\varrho$ ein $r$-Zyklus

(iv) $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1 \iff \sigma$ Produkt einer geraden # von Transp.

$\sigma((12)(34)) = 1$, $\sigma((12)) = -1$

$\underbrace{(1\,2\,3\,4)}_{\mathrm{sgn} = (-1)^{4-1}} \stackrel{!}{=} \underbrace{(12)(23)(34)}_{\text{hat sgn } -1}$ ✓

Bew.: (i): $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \prod_{i<j} \dfrac{\sigma\tau(j) - \sigma\tau(i)}{j-i}$

$$= \underbrace{\left( \prod_{i<j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j-i} \right)}_{\mathrm{sgn}(\tau)} \cdot \left( \prod_{i<j} \frac{\sigma\tau(j) - \sigma\tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)} \right)$$

$\{i,j\} \xhookrightarrow{\tau} \{\tau(i), \tau(j)\} = \{k,l\}$

$$= \mathrm{sgn}(\tau) \cdot \prod_{k<l} \frac{\sigma(k) - \sigma(l)}{k-l} = \mathrm{sgn}(\tau) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma).$$ ✓

(ii): $\operatorname{sgn}((1,2)) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \frac{1-2}{2-1} = -1$

Sei $(k,l)$ bel. Transp., dann ex. $\tau \in S_n$ mit $(k,l) = \tau(1,2)\tau^{-1}$
(mit Bem. 5.12)

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}((k,l)) = \operatorname{sgn}(\tau(1,2)\tau^{-1}) \underset{(i)}{=} \operatorname{sgn}(\tau)\, \underbrace{\operatorname{sgn}(1,2)}_{-1}\, \operatorname{sgn}(\tau)^{-1} = -\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\tau)^{-1} = -1$$

(iii): $\rho \underset{\text{Lemma 5.6}}{=} \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_{r-1}$, die $\tau_i$ Transp.
$\Rightarrow \operatorname{sgn} \rho = \operatorname{sgn}(\tau_1) \cdots \operatorname{sgn}(\tau_{r-1}) \underset{(ii)}{=} (-1)^{r-1}$

(iv): Nach 5.9: $\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_s$, die $\tau_i$ Transp. Dann:
$\operatorname{sgn}(\sigma) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) \underset{(i)}{=} \underbrace{\operatorname{sgn}(\tau_1) \cdots \operatorname{sgn}(\tau_s)}_{=(-1)^s} = 1 \Leftrightarrow 2 \mid s$. □

5.15. Def.: $\sigma \in S_n$ heißt gerade (bzw. ungerade) $:\Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ (bzw. $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$).
$A_n := \ker \operatorname{sgn} = \{\sigma \in S_n ; \sigma \text{ gerade}\} \leq S_n$ heißt alternierende Gruppe.

5.16. Lemma: $A_n$ ist NT in $S_n$ von Index 2, $S_n / A_n \cong \{1,-1\}$

Bew.: Sei $\tau \in S_n$, $\sigma \in A_n$. Dann: $\tau\sigma\tau^{-1} \overset{!}{\in} A_n$,
da $\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)^{-1} = \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$. Also: $\tau A_n \tau^{-1} \subseteq A_n$.

$A_n = \ker \operatorname{sgn}$

Homomorphiesatz:
$$\begin{tikzcd} S_n \arrow[r, two heads, "\operatorname{sgn}"] \arrow[d, "\pi"'] & \{1,-1\} \\ S_n/A_n \arrow[ur, dashed, "\text{Iso: } \varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$(\pi(\sigma) = \sigma A_n)$

$\rightarrow S_n/A_n \cong \{1,-1\}$,
$[S_n : A_n] = 2$. □

**5.18. Bsp.:** $S_3 = \{id, (1\,2), (1\,3), (2\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$

| Zykl.typ | Repr. | #El. |
|---|---|---|
| [2] | (1 2) | 3 |
| [3] | (1 2 3) | 2 |
| $\emptyset$ | id | 1 |
| | | 6 |

$A_3$

Bem.: $(1\,2\,3) = (1\,2)(2\,3)$

**5.19.** Bsp.: $S_4 = \{\ldots\}$ 24 Stück

| Zykl.typ | Repr. | #El. |
|---|---|---|
| [2] | (1 2) | 6 |
| [3] | (1 2 3) | 8 |
| [4] | (1 2 3 4) | 6 |
| [2, 2] | (1 2)(3 4) | 3 |
| $\emptyset$ | id | 1 |
| | | 24 |

entspr. ganzen Konj.kl.

$\downarrow$ 5.20

A4

**5.21. Lemma:** Sei $V \subseteq A_4 \leq S_4$ mit $V := \{id, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$.

Dann ist $V$ NT in $S_4$ und $V \cong C_2 \times C_2$ mit $C_2 := \{1, -1\}$, ist insb. also Gr. der Ordn. 4, deren El. $\neq id$ haben Ordn. 2.

Bew.: $V \setminus \{id\}$ ist Konj.kl. von Zykl.typ $[2,2]$,

$V$ unter Konj. abg. $\Rightarrow$ $V$ ist NT ✓

Ordn. 2 ✓ $\rightarrow$ Mult.tabelle für $V = \{e, a, b, c\}$

Somit: $V \cong C_2 \times C_2$. $\square$

**5.22. Def.:** Gruppen $\cong C_2 \times C_2$ heißen Kleinsche Vierergruppe (sind nicht zyklisch!)

**5.23. Satz:** $A_n$ wird von 3-Zyklen erzeugt, d.h. $A_n = \langle \{\tau \in S_n ; \tau \text{ 3-Zykl.}\} \rangle$.

Bew.: VI nach $\# \Delta(\sigma)$, $\Delta(\sigma) = \{i ; \sigma(i) \neq i\}$ Träger. $\square$

5.24. Def.: Gruppe $G$ ohne NT $\neq e$, $G$ heißen einfach.

5.25. Satz: Für $n \geq 5$ ist $A_n$ einfach.

Bew.: Sei $N$ ein NT in $A_n$, $N \neq id$.

zeige: $N = A_n$, nach 5.23: $\tau$ 3-Zyklus $\Rightarrow \tau \in N$.

* Beh.: $N$ enth. einen 3-Zyklus [...]
* Beh.: Je zwei 3-Zyklus sind konj. in $A_n$.

$\Rightarrow$ Alle 3-Zyklen in $N$, also $N = A_n$. $\square$

---

## A6: Direkte Summen abelsche Gruppen $\longrightarrow$ Hauptsatz

6.1. Einl.: direkte Summe: $\oplus \rightsquigarrow$ wie bei VR?

6.2. Def.: Sei $A$ abelsche Gruppe (additive geschrieben wie $\mathbb{Z}$)

$(B_i)_{i \in I}$ Familie von UG von $A$.

* $\sum_{i \in I} B_i = \langle \bigcup_{i \in I} B_i \rangle = \{ a_{i_1} + \dots + a_{i_n} ; n \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_n \in I, a_{i_\nu} \in B_{i_\nu} \}$

heißt Summe der Familie $(B_i)$

* $A$ heißt (innere) direkte Summe der $(B_i)_{i \in I}$, falls:

(i) $A = \sum_{i \in I} B_i$, (ii) $\forall j \in I$: $B_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} B_i = 0$

Schreibweise: $A = \bigoplus_{i \in I} B_i$.

6.3. $A = \bigoplus_{i \in I} B_i \iff \forall a \in A \; \exists!$ Darst. $a = b_{i_1} + \dots + b_{i_n}$, $n \in \mathbb{N}$,

$i_1, \dots, i_n \in I$ pwv, $b_{i_\nu} \in B_{i_\nu}$.

Ü

6.4. Bem.: $A_1, \dots, A_n$ bel. ab. Gr., $A := A_1 \times \dots \times A_n$

(äußere) "direkte Summe" von $A_1, \dots, A_n$.

Ü

6.5.: $B_1 \oplus \dots \oplus B_n \cong B_1 \times \dots \times B_n = \prod_{i=1}^{n} B_i$, die $B_i$ sind UG von $A$.

**6.6. Bem.:** Sei $A$ ab. Gr., $r \in \mathbb{Z}$. Dann: $\varphi_r : A \to A$, $a \mapsto ra$

ist Gr.hom. mit $\operatorname{im} \varphi_r = rA$, $\ker \varphi_r = \{a \in A;\ \operatorname{ord}(a) \mid r\}$.

**6.7. Lemma:** Seien $B_1, \dots, B_m$ UG von $A$. Dann:

(i) $r\left(\sum_{i=1}^m B_i\right) \overset{!}{=} \sum_{i=1}^m r B_i$, (ii) $A = \bigoplus_{i=1}^m B_i \Rightarrow rA = \bigoplus_{i=1}^m rB_i$

und $A/rA \cong \prod_{i=1}^m B_i/rB_i \cong \bigoplus_{i=1}^m B_i/rB_i$

Bew.: (i) ... ✓, (ii): Hom.satz ✓ □

**6.8. Def.:** $F$ ab. Gr. heißt <u>frei</u> $:\Leftrightarrow$ $\exists$ Familie $A := (a_i)_{i \in I}$ von El. $a_i \in F$:

(i) $F = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} a_i$, $\mathbb{Z} a_i = \{r a_i;\ r \in \mathbb{Z}\} = \langle a \rangle$

(ii) $\forall i \in I: \mathbb{Z} a_i \cong \mathbb{Z}$, d.h. $a_i$ unendl. Ordn.

Ein solches $A$ heißt <u>Basis von $F$</u>.

Gilt nur $F = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} a_i$ mit $I$ endl., so heißt $F$ <u>endl. erz.</u>

**6.9. Bsp.:** $F = \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ mal}}$ ist frei mit Basis $\left( (e_i) = \underbrace{(0, \dots, \overset{\text{Stelle } i}{1}, \dots, 0)}_{n \text{ lang}} \right)$

**6.10. Satz:** Sei $F$ frei mit Basis $A = (a_i)_{i \in I}$. Dann:

$\forall$ Abb. $\varphi_0 : \{a_i;\ i \in I\} \to B$, $B$ ab. Gr.

$\exists!$ Hom. $\varphi : F \to B$ : $\forall i \in I : \varphi(a_i) = \varphi_0(a_i)$.

⌜Es genügt, einen Hom. auf $F$ auf Basisel. vorzugeben!⌟

Bew.:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "\iota", hook] & B \\ F \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$\varphi_0 = \varphi \circ \iota$

Def.: $\varphi : F \to B$, $\sum_{i=1}^n r_i a_i \mapsto \sum_{i=1}^n r_i (\varphi_0 a_i)$ ✓ □

**6.11. Kor.:** Jede endl. erz. ab. Gr. $B$ ist hom. Bild einer freien Gr.

Bew.: $B = \sum_{i=1}^m \mathbb{Z} b_i$, $F := \mathbb{Z}^m$, Def. $\varphi : F \to B$

zu $\varphi_0(e_i) := b_i \overset{6.10}{\Rightarrow} \varphi$ surj. Hom. □