A9: Sylowgruppen

9.1. Einleitung: Sylowsätze ⇝ nur endl. Gruppen!

9.2. Haben: <u>Def.</u>: Sei G endl. Gruppe, X endl., G <u>operiere auf</u> X,
d.h. $T: G \times X \to X$, $(a,x) \mapsto ax$ erfüllt (i) $(ab)x = a(bx)$, (ii) $ex = x$.
dann ist $T: G \to \mathrm{Perm}(X)$ Gruppenhom.

9.3. Bem.: Haben Bahnenzerl. $X = X_1 \dot\cup \ldots \dot\cup X_r = Gx_1 \dot\cup \ldots \dot\cup Gx_r$

ferner: $\#X = \sum_{i=1}^{m} \#Gx_i = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{[G : \mathrm{Iso}(x_i)]}_{= \frac{\#G}{\#\mathrm{Iso}(x_i)} = \#G/\mathrm{Iso}(x_i)}$ $\qquad Gx = \{gx;\, g \in G\}$

mit $\mathrm{Iso}(x) = \{a \in G;\, ax = x\}$

Speziell: $X = G$, T = Konjugation, dann $\#G = \#\underset{\text{Zentrum}}{Z(G)} + \sum_{i=1}^{s} \underbrace{[G : \underset{\text{Zentralisator}}{Z(x_i)}]}_{>1}$

Klassengleichung

9.4. Def.: Für $p \in \mathbb{N}$ prim heißt G eine p-Gruppe, falls $\#G = p^e$, $e \in \mathbb{N}$

9.5. Bem.: A3.18: p-Gruppen $\neq e$ haben ein Zentrum $\neq e$.

9.6. Def.: Sei G Gr., $H \leq G$ UG. Dann
$N(H) := \{a \in G;\, aHa^{-1} = H\}$ der <u>Normalisator von H</u>.

9.7. Bem.: $N(H)$ ist die größte UG von G, in der H ein NT ist.
D.h. $N(H)$ max. mit $\underline{H \trianglelefteq N(H) \leq G}$

9.8. Def.: Sei G endl. Gr., $p \in \mathbb{N}$ prim, $\#G = p^k \cdot m$ mit $p \nmid m$ (Kurz: $p^k \,\|\, \#G$)
Eine <u>p-Sylowgruppe</u> von G ist eine UG P der Ordnung p^k.

9.9. <u>Satz von Sylow / "Sylow-Sätze"</u>: Sei <u>G endl. Gr.</u>, $p \in \mathbb{N}$ prim. Dann gilt:
(i) Es gibt p-Sylowgruppe von G.
(ii) Je zwei p-Sylowgr. von G sind <u>konjugiert</u>,
d.h. $\exists a \in G$ mit $P' = aPa^{-1}$ für p-Sylowgr. P und P'.
Die Anzahl der p-Sylowgr. <u>ist $\equiv 1\ (p)$</u> und teilt $\#G$.
(iii) Jede p-UG ist in einer p-Sylowgr. von G enthalten.

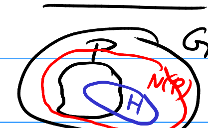
9.10 Bem.: Klar für endl. ab. Gr. A wegen: $A \underset{HS}{\cong} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p_1^{e_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p_m^{e_m}$
mit $p \mid \#A = \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}$ (die p_i nicht notw. pwv.). Dann ist
dann ist $\sum_{p_i = p} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p_i^{e_i}$ eine p-Sylowgr. von A, und eind.

9.11. Bew. von 9.9.(i): VI nach $\#G = p^k \cdot m$, $p \nmid m$. Sei $G \neq e$ und OE $k \geq 1$ ⌈✓⌋.
Klassenglg.: $\#G = \#Z(G) + \sum_{i=1}^{s} \underbrace{[G : Z(x_i)]}_{p\nmid\text{" oder } p\mid\text{" ?}}$, OE $s > 0$ (sonst G abelsch, dann 9.10.)

Fall 1: $\exists i : p \nmid [G : Z(x_i)] = \frac{\#G}{\#Z(x_i)}$.
wegen $\underbrace{\#G}_{p^k \mid \text{"}} = \#Z(x_i) \cdot \underbrace{[G : Z(x_i)]}_{p \nmid \text{"}}$ folgt $p^k \mid \underbrace{\#Z(x_i)}_{< \#G}$,
nach IV $\exists$ p-Sylowgr. von $Z(x_i)$ bzw. von G.
Fall 2: $\forall i : p \mid [G : Z(x_i)]$, also $p \mid \#Z(G) = \underbrace{\#G - \sum_{i=1}^{m} [G : Z(x_i)]}$ $(\equiv 0 \, (p))$.
Da $Z(G)$ endl. ab., ex. $e \neq a \in Z(G) : a^p = e$
"Satz von Cauchy": vgl. 9.10: Betr. dir. Summand $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^j$ von $Z(G)$,
wähle c darin mit $\mathrm{ord}(c) = p^j$, so dass $(\underbrace{c^{p^{j-1}}}_{\text{hat Ordn. } p})^p = c^{p^j} = e$ ⌋

Sei $H := \langle a \rangle \subseteq G$, ist NT in G weil $H \subseteq Z(G)$.
Dann hat $\bar{G} := G/H$ die Ordnung $p^{k-1} m < \#G$.
IV liefert eine p-Sylowgr. $\bar{P}$ von $\bar{G}$ mit $\#\bar{P} = p^{k-1}$.
Betr. $\pi : G \twoheadrightarrow \bar{G}$, $a \mapsto aH$, hat Kern H mit $\#H = p$.
Setze $P := \pi^{-1}(\bar{P})$, hat Ordnung $\#H \cdot \#\bar{P} = p^k$, d.h. P ist p-Sylowgr. von G.
□

9.12. Lemma: Sei P eine p-Sylowgr. von G. Dann ist jede p-UG $H \subseteq N(P)$
enthalten in P.
Bew.: Betr. $\pi : N(P) \twoheadrightarrow N(P)/P$.
Da $p \nmid \#(N(P)/P)$ und $\#\pi(H)$ p-Potenz
ist $\pi(H) = e$, also $H \subseteq \ker \pi = P$. □
Bem. 9.7

Situation:


geht so nicht! Notwendig: $H \subseteq P$

9.13. Bew. von 9.9.(ii): Betr. $\Pi := \{P \subseteq G;\ P$ p-Sylowgr. in $G\}$. $\left[\begin{array}{l}\neq \emptyset \\ \text{wegen (i)}\end{array}\right]$

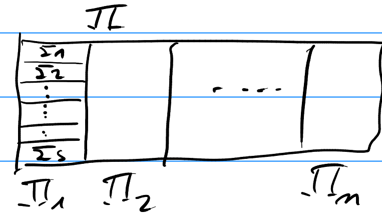
G op. auf Π verm. Konjugation:

$$G \times \Pi \to \Pi,\quad (a,P) \mapsto aPa^{-1}$$

z.z.: Π best. aus nur einer Bahn,

d.h. ist $\Pi = \Pi_1 \dot\cup \dots \dot\cup \Pi_n$ die Bahnenzerl., z.z.: $n \overset{!}{=} 1$.

Sei $Q \in \Pi$ (nicht spezifiziert, in welchem Π_i),



Q op. auf Π_1 vermöge

$$Q \times \Pi_1 \to \Pi_1$$

$$(q,\ gP_1g^{-1}) \mapsto (qg)P_1(qg)^{-1}.$$

Π_1 zerfällt unter Op. von Q in Bahnen $\Pi_1 = \Sigma_1 \dot\cup \dots \dot\cup \Sigma_s$.

*Beh.: (a) $Q \in \Sigma_i \Rightarrow \#\Sigma_i = 1$.

(b) $Q \notin \Sigma_i \Rightarrow p \mid \#\Sigma_i$

⌜(a): klar, da $\Sigma_i = \{qP'q^{-1};\ q \in Q\}$ für ein $P' \in \Pi_1$

⌜$Q = qP'q^{-1}$ für ein $q \in Q$⌟

(b): Anw. von 9.3., 9.6, Lemma 9.12 ⌜...⌟

⌞

Ann: $n > 1$ Wählen $Q \in \Pi_1 \overset{(a)\&(b)}{\Longrightarrow} \#\Pi_1 \equiv 1\ (p)$

" $Q \in \Pi_2 \overset{(a)\&(b)}{\Longrightarrow} \#\Pi_1 \equiv 0\ (p)$ } ↯ zu $n > 1$

Also: $n = 1$.

* Sei $\Pi = \{P_1, \dots, P_r\}$, Bew. zeigt: je zwei der P_i konjugiert, deren Anz. ist $\#\Pi = \#(G/N(P_1)) = [G : N(P_1)] = \frac{\#G}{\#N(P_1)} \mid \#G$.

□

9.14. Lemma: Sei H eine p-Gr., die auf X op., X endl., dann ist die Anz. der Fixpunkte von H stets $\equiv \#X\ (p)$.

Bew.: ⌜Bahnengl.: $\#X = \sum [H : \mathrm{Iso}(x_i)]$, also # Fixpkte. $\equiv \#X\ (p)$. □

Bew. von 9.9(iii): Sei H p-UG von G.

Dann op. H auf Π verm. Konjugation.

Mit L. 9.14, 9.9(ii) ist: $\# \text{Fixpkte} \underset{\substack{\uparrow \\ 9.14}}{\equiv} \# \Pi \ (p) \underset{\substack{\uparrow \\ 9.9(ii)}}{\equiv} 1 \ (p)$,

d.h. es ex. Fixpkt. Q, d.h. $\forall h \in H: hQh^{-1} = Q$,

also $H \leq N(Q)$. Mit L. 9.12 folgt $H \leq Q$,

Q eine p-Sylowgr. von G.

$\square$