

Abgabe: Donnerstag, 29.10.2026 in der Vorlesung

Vorlesungswebseite: <https://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/elzt26/>

Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die n -te *Fermat-Zahl* definiert durch $F_n := 2^{2^n} + 1$. Zeigen Sie: Die Fermat-Zahlen sind paarweise teilerfremd.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $F_n = F_0 F_1 \cdots F_{n-1} + 2$.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\omega(n)$ die Anzahl der Primzahlen p mit $p \mid n$, ihre sogenannte *Primteileranzahl*. Seien $g, k \in \mathbb{N}$ mit $g \mid k$. Zeigen Sie: Die Anzahl der Paare $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ mit $(x, y) = g$ und $[x, y] = k$ beträgt genau $2^{\omega(k/g)}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a, b > 0$ so, dass es $u, v \in \mathbb{N}$ gibt mit $a^u = b^v$. Zeigen Sie: Es gibt ein $c \in \mathbb{Q}$ und $r, s \in \mathbb{N}$ mit $a = c^r$ und $b = c^s$.

Aufgabe 4 (4+1 Punkte):

- (a) Für $x \in \mathbb{C}$ sei ein Polynom $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ gegeben, für welches $a_n = 1$ und $a_j \in \mathbb{Z}$ für alle j gilt. Zeigen Sie: Jede Nullstelle von P liegt in $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$.
- (b) Zeigen Sie: Die Wurzel einer ganzen Zahl ist ganz oder irrational.

Hinweis: Nehmen Sie für Teil (a) an, dass es eine Nullstelle $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ gibt und formulieren Sie die Gleichung $P(x_0) = 0$ dann so um, dass auf beiden Seiten nur noch ganze Zahlen stehen.