Einführung in die Zahlentheorie
Blatt 3

PD Dr. Karin Halupczok
hhu Düsseldorf
WiSe 2026/27

Abgabe: Donnerstag, 05.11.2026 in der Vorlesung

Vorlesungswebseite: `https://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/elzt26/`
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $(a, b) = 1$ und $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ mit $c = x_0 a + y_0 b$. Sei L die Menge aller Paare $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mit $c = xa + yb$. Zeigen Sie:

$$L = \big\{(x_0 - tb, y_0 + ta) \in \mathbb{Z}^2 \, ; \, t \in \mathbb{Z}\big\}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Bestimmen Sie mit dem euklidischen Algorithmus $d := (8911, 5561)$ und $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $d = 8911x + 5561y$.

Aufgabe 3 (3 Punkte):

Finden Sie $x, y \in \mathbb{N}$ mit $14x + 155y = 1000$. Gibt es nur ein solches Paar?

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Seien $a, m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $(a^m - 1, a^n - 1) = (a^{m-n} - 1, a^n - 1)$ *und wenden Sie dies dann an, um in den Exponenten* m *und* n *den euklidischen Algorithmus durchzuführen. Verwenden Sie anschließend die Konvention, dass* $(0, k) := k$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 5 (1+1+1+1 Punkte):

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt die natürliche Zahl $R_n := \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$ die n-te *Repetier-Eins*.

(a) Bestimmen Sie (R_n, R_m) für alle $n, m \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Aussage aus Aufgabe 4 verwenden.

(b) Zeigen Sie: Aus $n \mid m$ folgt $R_n \mid R_m$.

(c) Zeigen Sie: Aus $d \mid R_n$ und $d \mid R_m$ folgt $d \mid R_{n+m}$.
Hinweis: Zeigen Sie erst $R_{n+m} = 10^m R_n + R_m$.

(d) Zeigen Sie: Es gilt $(R_n, R_m) = 1$ genau dann, wenn $(n, m) = 1$.