Einführung in die Zahlentheorie
Blatt 4

PD Dr. Karin Halupczok
hhu Düsseldorf
WiSe 2026/27

Abgabe: Donnerstag, 12.11.2026 in der Vorlesung

Vorlesungswebseite: `https://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/elzt26/`
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (3+3 Punkte):

Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit Kettenbruchentwicklung $\alpha = [\![q_0; q_1, ..., q_n]\!]$ und k-tem Näherungsbruch c_k/d_k.

(a) Zeigen Sie für $0 \leq k \leq n$ und $x > 0$, dass $[\![q_0; q_1, ..., q_k, x]\!] = \dfrac{c_k x + c_{k-1}}{d_k x + d_{k-1}}$.

(b) Zeigen Sie für $0 \leq k < n$, dass $\left|\alpha - \dfrac{c_k}{d_k}\right| \leq \dfrac{1}{d_k d_{k+1}}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei $1 \leq k \leq n$ und c_k/d_k der k-te Näherungsbruch des Kettenbruches $[\![q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]\!]$. Zeigen Sie:

$$c_k = \det \begin{pmatrix} q_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & q_1 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & q_2 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & q_{k-2} & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & q_{k-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & q_k \end{pmatrix},$$

d. h. c_k ist die Determinante einer Bandmatrix.
Finden Sie einen ähnlichen Ausdruck für d_k (und beweisen Sie diese Beziehung).

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Sei $1 \leq k \leq n$ und c_k/d_k der k-te Näherungsbruch des Kettenbruches $[\![q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]\!]$ mit $q_0 > 0$. Zeigen Sie:

$$\frac{c_k}{c_{k-1}} = [\![q_k; q_{k-1}, q_{k-2}, \ldots, q_1, q_0]\!].$$

Finden und beweisen Sie auch die analoge Formel für d_k/d_{k-1}.

Hinweis: Für den ersten Bruch hilft die Beziehung $c_k/c_{k-1} = q_k + c_{k-2}/c_{k-1} = q_k + 1/(c_{k-1}/c_{k-2})$ weiter, und eine analoge Beziehung für den zweiten Bruch.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte):

(a) Wie viele Dezimalstellen hat die Fibonaccizahl u_{100}?

(b) Was kann man über Existenz und Wert von $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+k}}{u_n}$ sagen?