Einführung in die Zahlentheorie
Blatt 5

PD Dr. Karin Halupczok
hhu Düsseldorf
WiSe 2026/27

Abgabe: Donnerstag, 19.11.2026 in der Vorlesung

Vorlesungswebseite: `https://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/elzt26/`

Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte):

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k = \frac{z}{1-z-z^2}$.

(b) Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{10^{k+1}} = \frac{1}{u_{11}}$.

Aufgabe 2 (2+1+2+1 Punkte):

(a) Berechnen Sie ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $245x + 592y = 1$.

(b) Bestimmen Sie die zu $\underline{245}$ inverse Restklasse in $\mathbb{Z}/592\mathbb{Z}$.

(c) Lösen Sie die Kongruenz $245x + 3 \equiv 11 \bmod 592$ in $\mathbb{Z}$.

(d) Geben Sie die Einheitengruppe des Ringes $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ explizit an.

Aufgabe 3 (3+1+1+2 Punkte):
Ein topologischer Beweis von $\#\mathbb{P} = \infty$ nach H. Fürstenberg (1955).

(a) Mit dem Mengensystem

$$\mathcal{O} := \left\{ \bigcup_{k \in I} (a_k + m_k\mathbb{Z}) \; ; \; a_k \in \mathbb{Z},\, m_k \in \mathbb{N},\, I \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

wird $\mathbb{Z}$ zu einem topologischen Raum.

(b) Jede Restklasse $a + m\mathbb{Z}$ ist bezüglich $\mathcal{O}$ offen und abgeschlossen.

(c) Die Menge $A := \bigcup_{p \text{ prim}} p\mathbb{Z}$ ist bezüglich $\mathcal{O}$ offen, aber nicht abgeschlossen.

(d) Mit Teil (a)-(c) folgt $\#\mathbb{P} = \infty$.

Aufgabe 4 (1+2 Punkte):

(a) Für jede Primzahl $p > 2$ gilt $2^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

(b) Für jede Primzahl $p > 5$ gilt $u_p \equiv 5^{\frac{p-1}{2}} \mod p$.