

Abgabe: gar nicht, nur zur mündlichen Besprechung am 13.10.2026

Vorlesungswebseite: <https://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/elzt26/>

Aufgabe 1: Teilbarkeit

Diese Aufgaben können Sie lösen, ohne den Satz von der eindeutigen PFZ zu verwenden.

- (1) Zeigen oder widerlegen Sie: Gilt $a \mid (b + c)$, so ist entweder $a \mid b$ oder $a \mid c$.
- (2) Zeigen Sie, dass $(a, a + n) \mid n$, und schließen Sie daraus $(a, a + 1) = 1$.
- (3) Zeigen Sie: Aus $(a, b) = 1$ und $c \mid (a + b)$ folgt $(a, c) = (b, c) = 1$.
- (4) Folgt aus $(a, b) = 1$ die Behauptung $(a + b, ab) = 1$?
- (5) Zeigen Sie: $d = (a, b) \iff d \mid a, d \mid b$ und $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$
- (6) Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sei $2 \nmid d$, sei $d \mid (a + b)$ und $d \mid (a - b)$. Zeigen Sie, dass $d \mid (a, b)$.
- (7) Zeigen Sie: $(a, bc) = (a, (a, b)c)$.
- (8) Zeigen Sie: $(a, bc) = (a, (a, b)(a, c))$.
- (9) Zeigen Sie: Gilt $(a, c) = 1$, dann ist $(ab, c) = (b, c)$.
- (10) Zeigen Sie: Gilt $(a, b) = (a, c) = (b, c) = 1$, so ist $[a, b, c] = abc$.
- (11) Zeigen Sie: Für alle $a, c, k \in \mathbb{Z}$ gilt $(a, c) = (a, c + ka)$.
- (12) Zeigen oder widerlegen Sie:
 - (a) Gilt $(a, b) = (a, c)$, so folgt $[a, b] = [a, c]$.
 - (b) Gilt $(a, b) = (a, c)$, so folgt $(a^2, b^2) = (a^2, c^2)$.
 - (c) Gilt $(a, b) = (a, c)$, so folgt $(a, b) = (a, b, c)$.
 - (d) Gilt $(a, b) = 1$, so folgt $(a + b, a - b) \in \{1, 2\}$.
 - (e) Gilt $b \mid (a^2 + 1)$, so folgt $b \mid (a^4 + 1)$.
 - (f) Es gilt $(a, b, c) = ((a, b), (b, c))$.
- (13) Zeigen Sie $(a, b) = (a + b, [a, b])$. Finden Sie damit zwei natürliche Zahlen der Summe 186, deren kgV gleich 1440 ist.
- (14) Bestimmen Sie $(11\,111\,111, 111\,111\,111\,111\,111)$.
- (15) Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?
 - (a) $3 \mid n^3 - n$,
 - (b) $3 \mid n(n + 1)$,
 - (c) $8 \mid (2n + 1)^2 - 1$,
 - (d) $6 \mid n(n + 1)(n + 2)$.
 - (e) $(6n - 1, 6n + 1, 6n + 2, 6n + 3, 6n + 5) = 1$.
 - (f) Für gerade n gilt $24 \mid n(n + 1)(n + 2)$.
- (16) Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n gilt $17 \mid 14^{2n+1} + 3 \cdot 9^n$.