

**Abgabe: bis Montag 18.12.2023, vor der Vorlesung**

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/krypto/>

---

**Aufgabe 1:** Projektive Ebene über einem endlichen Körper

Sei  $k$  ein Körper mit  $p^r$  Elementen.

Zeigen Sie auf zwei verschiedene Weisen, dass es  $p^{2r} + p^r + 1$  viele Punkte in  $\mathbb{P}^2(k)$  gibt.

Warum gibt es ebensoviele Geraden in  $\mathbb{P}^2(k)$ ?

**Aufgabe 2:** Projektive Schnittpunkte mit Vielfachheiten berechnen

Sei  $k$  ein beliebiger Körper.

- (a) Berechnen Sie alle unendlich fernen Punkte auf den Parabeln  $y = x^2$  und  $y = -x^2 + 1$ .
- (b) Wieviele projektive Schnittpunkte (gezählt mit Vielfachheiten) gibt es?
- (c) Wie könnte eine Verallgemeinerung von (b) auf die Kurven  $f_1(x, y) = 0$  und  $f_2(x, y) = 0$  aussehen, wobei  $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[x, y]$  mit  $f_1 \neq f_2$ ? Denken Sie dabei auch an den Fall zweier Geraden.

**Aufgabe 3:** Singuläre Punkte auf einer projektiven Kurve

- (a) Sei  $k$  ein Körper der Charakteristik 0 und  $F(X, Y, Z) \in k[X, Y, Z] \setminus k$  homogen vom Grad  $d$ . Zeigen Sie, dass  $F$  die Eulersche Differentialgleichung

$$X \frac{\partial F}{\partial X} + Y \frac{\partial F}{\partial Y} + Z \frac{\partial F}{\partial Z} = dF$$

löst.

- (b) Die Lemniskate von Bernoulli ist die Kurve  $\mathcal{C}_f$  mit  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ . Bestimmen Sie alle singulären Punkte von  $\mathcal{C}_f \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Welche Punkte liegen auf der unendlich fernen Geraden?

**Aufgabe 4:** Ein Modell einer Boyschen Fläche

Unter dem Link

[www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Deutsch/DAS%20\\_TOPOLOGIKON.pdf](http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Deutsch/DAS%20_TOPOLOGIKON.pdf) findet man auf S. 48 der pdf-Datei eine Bastelanleitung der Boyschen Fläche, die  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  im  $\mathbb{R}^3$  darstellt. Basteln Sie diese Fläche nach und bringen Sie Ihr Modell in die Übungsgruppe mit.