Vorlesung Zahlentheorie I (Algebraische ZT)

WiSe '22/'23, hhu
K. Halupczok

Z16: Gitter und diskrete Gruppen

Stichworte: diskrete UG des $\mathbb{R}^n$, Gitter, Fundamentalbereich/Grundmasche, Gitterpunktsatz von Minkowski, Kanonische Einbettung von K in $\mathbb{C}$, Minkowski-Konstante, Kronecker-Vermutung

---

16.1. **Einleitung:** Die diskreten UG des $\mathbb{R}^n$ sind genau die Gitter. Eine meßbare Menge vom Maß, das größer als das Volumen eines Fundamentalbereichs ist, enthält zwei verschiedene Punkte, deren Differenz ein Gitterpunkt ist. Dies ist bereits eine Version des Gitterpunktsatzes von Minkowski und führt zu einem verbesserten λ (aus Z15, zur Klassenzahlbestimmung dienlich). Darin kommt $\sqrt{|\operatorname{disc} K|}$ als Faktor vor, so dass sich erst jetzt $\operatorname{disc} K \neq \pm 1$ für $K \neq \mathbb{Q}$ ergibt (die ehemalige Kroneckersche Vermutung).

16.2. **Def.:** • Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt diskret, falls $\forall \varrho \in \mathbb{R}$: Γ enthält nur endlich viele Elemente der Länge $\leq \varrho$.

• Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Gitter (vom Rang r), falls $\exists$ lin. unabh. $v_1, \dots, v_r \in \Gamma$ mit $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} v_i$.

Das folgende Lemma bestätigt die geometrische Anschauung der diskreten UGen des $\mathbb{R}^n$ als Gitter.

16.3 **Lemma:** Die diskreten UGen des $\mathbb{R}^n$ sind genau die Gitter.

Bew.: (i): Gitter sind diskrete UG des $\mathbb{R}^n$: Vollst. Ind. nach r: $r=1$ ✓, $r>1$:

Betr. $U := \sum_{i=1}^{r-1} \mathbb{R} v_i$ und schreiben $v_r = v + v'$ mit $v \in U^\perp$, $v' \in U$.

Für $w = \sum_{i=1}^{r} m_i v_i \in \Gamma$, die $m_i \in \mathbb{Z}$, gilt: $|w| \geq |m_r| \cdot |v|$, $\left|\sum_{i=1}^{r-1} m_i v_i + m_r v'\right|$

$\ulcorner$da $w = \left(\sum_{i=1}^{r-1} m_i v_i + m_r v'\right) + m_r v \lrcorner$ Also: Für $|w| \leq \varrho$ gilt $|m_r| \leq \frac{\varrho}{|v|}$,

d.h. nur endl. viele solcher m_r ex. Somit gilt:

$$\left|\sum_{i=1}^{r-1} m_i v_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{r-1} m_i v_i + m_r v'\right| + |m_r| \cdot |v'| \leq \varrho + \varrho \frac{|v'|}{|v|} = \varrho\left(1 + \frac{|v'|}{|v|}\right).$$

Nach Ind.vor. gibt es dann nur endlich viele $w \in \Gamma$ mit $|w| \leq \varrho$.

(ii): Diskrete UG Γ des $\mathbb{R}^n$ sind Gitter: Sei OE $\Gamma \neq 0$. Vollst. Ind. nach n:

$n=1$: Ex. $0 \neq v_1 \in \Gamma$ mit $|v_1|$ minimal. Zu $v \in \Gamma$ ex. ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $|\Gamma| \ni |v - m v_1| < |v_1|$, also ist $v = m v_1$, also Γ Gitter.

$n > 1$: Sei $0 \neq v \in \Gamma$ und $U := (\mathbb{R}v)^\perp$, ist $(n-1)$-dimensionaler euklidischer VR, und sei $\pi : \mathbb{R}^n \to U$ die Projektion entlang $\mathbb{R}v$.

Dann ist $\pi\Gamma$ diskrete UG von U. ⌈Zu $w' \in \pi\Gamma$ ex. ein $w \in \Gamma$ mit $\pi w = w'$ und $|w - w'| < |v|$, also folgt: $|w| \le |w - w'| + |w'| \le |v| + |v'|$.⌋

Nach Ind.vor. ist also $\pi\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z} w_i'$ für gewisse lin. unabh. $w_1', \dots, w_s'$.

Seien $w_1, \dots, w_s \in \Gamma$ mit $\pi w_i = w_i'$, und sei $w_{s+1} \in \mathbb{R}v$ mit $\Gamma \cap \mathbb{R}v = \mathbb{Z} w_{s+1}$.

Es folgt: $\bigoplus_{i=1}^{s+1} \mathbb{Z} w_i = \Gamma$.

⌈Sei $w \in \Gamma$. Dann ist $\pi w = \sum_{i=1}^{s} m_i w_i'$, also $w - \sum_{i=1}^{s} m_i w_i \in \Gamma \cap \mathbb{R}v = \mathbb{Z} w_{s+1}$.⌋

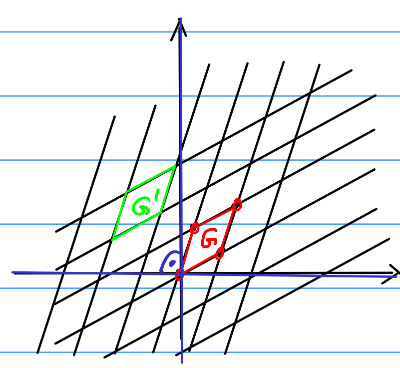
□

16.4. **Def.**: Gitter $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ vom Rang n heißen vollständig. Sei $v_1, \dots, v_n$ Basis des vollständigen Gitters Γ. Dann heißt $G := \{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \ ; \ 0 \le a_i < 1, a_i \in \mathbb{R} \}$ ein Fundamentalbereich von Γ (auch: Grundmasche). Dieses hängt von $v_1, \dots, v_n$ ab. Weiter sei $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n / \Gamma) := \mu(G)$, wo μ das Lebesguemaß im $\mathbb{R}^n$, das Volumen des Fundamentalbereichs von Γ.

16.5. **Bem.**: $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n / \Gamma)$ hängt nicht von G ab.

⌈Sei $v_i = (b_{i1}, \dots, b_{in})$ für $1 \le i \le n$, dann ist also $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n / \Gamma) = |\det(b_{ij})|$.

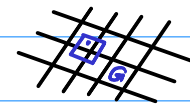
Ist weiter $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = (c_{i1}, \dots, c_{in})$ für $1 \le i \le n$, so ist $(a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{Z})$, also $\det(a_{ij}) = \pm 1$, d.h. $|\det(c_{ij})| = |\det(a_{ij})| \cdot |\det(b_{ij})| = |\det(b_{ij})| = \mathrm{vol}(\mathbb{R}^n / \Gamma)$.⌋



Koordinatenachsen stehen senkrecht, optische Täuschung!

16.6. **Satz (von Minkowski):** Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ ein vollständiges Gitter und $S \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar mit $\mu(S) > \mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)$.
Dann gibt es $w_1, w_2 \in S$ mit $w_1 \neq w_2$ und $w_2 - w_1 \in \Gamma$.

Bew.: Sei $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} v_i$, und G die dazugehörige Grundmasche.
Dann ist $\mathbb{R}^n = \dot{\bigcup}_{v\in\Gamma} (G+v)$, also $S = S \cap \dot{\bigcup}_{v\in\Gamma}(G+v) = \dot{\bigcup}_{v\in\Gamma} S\cap(G+v)$.
Es folgt:



$$\mu(G) < \mu(S) = \sum_{v\in\Gamma} \mu(S\cap(G+v)) = \sum_{v\in\Gamma} \mu((S-v)\cap G).$$

Also ex. $w_1', w_2' \in \Gamma$, $w_1' \neq w_2'$, mit $(S-w_1')\cap G \cap (S-w_2') \neq \emptyset$.
Somit ex. $w_1, w_2 \in S$, $w_1 \neq w_2$, so dass $w_1 - w_1' = w_2 - w_2'$ ist,
also ist $w_2 - w_1 = w_2' - w_1' \in \Gamma$. □

16.7. Gitterpunktsatz von Minkowski: Sei Γ ein vollständiges Gitter im $\mathbb{R}^n$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, symmetrisch (bzgl. Punkt 0) und konvex.
Ist $\mu(S) > 2^n \mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ [Oder: $\mu(S) \geq 2^n \mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ und S kompakt], so enthält S einen Gitterpunkt $v \neq 0$.

Bew.: Wenden 16.6 an auf $S' := \frac{1}{2} S = \{\frac{1}{2} s;\ s \in S\}$. Es ist $\mu(S') = (\frac{1}{2})^n \mu(S) > \mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)$, also ex. $w_1, w_2 \in S$, $w_1 \neq w_2$ und $\frac{1}{2} w_1 - \frac{1}{2} w_2 \in \Gamma$. Da S symmetrisch und konvex ist,
ist $0 \neq \frac{1}{2} \underbrace{w_1}_{\in S} + \frac{1}{2} \underbrace{(-w_2)}_{\in S} \in S$.

Ist S kompakt und $\mu(S) = 2^n \mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)$, so wenden wir 16.6 an auf $(1+\varepsilon)S$ mit $\varepsilon > 0$.
⌜Sei nun $S_0' := (1+\varepsilon)S$ und $S' := \frac{1}{2} S_0'$. Dann: $\mu(S') = (\frac{1}{2})^n \mu(S)(1+\varepsilon)^n$,
also $\mu(S') > \mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)$, also ex. $w_1^{(\varepsilon)}, w_2^{(\varepsilon)} \in S: 0 \neq \frac{1+\varepsilon}{2} w_1^{(\varepsilon)} - \frac{1+\varepsilon}{2} w_2^{(\varepsilon)} \in S \cap \Gamma$.
Mit $\varepsilon \to 0$ folgt ⌜Folgenkp. & Γ diskret⌟: $\exists\, w_1, w_2 \in S: 0 \neq \frac{1}{2} w_1 - \frac{1}{2} w_2 \in S \cap \Gamma$.⌟ □

16.8. **Bem.:** Die Schranke in 16.7 ist optimal. ⌜Würfel...⌟

16.9. **Def.:** Sei K ein ZK vom Grad n. Einbettungen $\sigma: K \to \mathbb{C}$ mit $\sigma K \subseteq \mathbb{R}$ heißen reell. Für nichtreelle σ ist $\sigma \neq \bar{\sigma} := \alpha\sigma$, wo α die Konjugation in $\mathbb{C}$ bezeichnet. Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ die reellen Einbettungen von K, und $\tau_1, \dots, \tau_t$ die nichtreellen Einbettungen von K so, dass $\sigma_1, \dots, \sigma_s, \tau_1, \dots, \tau_t, \bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_t$ sämtliche Einbettungen von K in $\mathbb{C}$ sind, und $n = s + 2t$ ist. Dann heißt

$$\sigma: K \xrightarrow{\sigma'} \mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^t \xrightarrow{\varphi(I\,50)} \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto (\sigma_1 x, \dots, \sigma_s x, \tau_1 x, \dots, \tau_t x) \mapsto (\sigma_1 x, \dots, \sigma_s x, \mathrm{Re}\,\tau_1 x, \mathrm{Im}\,\tau_1 x, \dots, \mathrm{Re}\,\tau_t x, \mathrm{Im}\,\tau_t x)$$

die kanonische Einbettung von K.

16.10. **Bem.:** σ ist $\mathbb{Q}$-linear und injektiv.

16.11. **Lemma:** Sei $M = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} x_i$ eine freie UG vom Rang n. Dann ist σM ein vollständiges Gitter im $\mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\sigma M) = 2^{-t}\sqrt{|\mathrm{disc}(x_1, \dots, x_n)|}$.

Bew.: Es ist

$$\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\sigma M) = \left|\det\begin{pmatrix} \sigma_1 x_1 & \cdots & \sigma_s x_1 & \mathrm{Re}\,\tau_1 x_1 & \mathrm{Im}\,\tau_1 x_1 & \cdots & \mathrm{Re}\,\tau_t x_1 & \mathrm{Im}\,\tau_t x_1 \\ \sigma_1 x_2 & \cdots & \sigma_s x_2 & \mathrm{Re}\,\tau_1 x_2 & \mathrm{Im}\,\tau_1 x_2 & \cdots & \mathrm{Re}\,\tau_t x_2 & \mathrm{Im}\,\tau_t x_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_1 x_n & \cdots & \sigma_s x_n & \mathrm{Re}\,\tau_1 x_n & \mathrm{Im}\,\tau_1 x_n & \cdots & \mathrm{Re}\,\tau_t x_n & \mathrm{Im}\,\tau_t x_n \end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2^t}\left|\det\begin{pmatrix} \sigma_1 x_1 & \cdots & \sigma_s x_1 & \tau_1 x_1 & -2\,\mathrm{Im}\,\tau_1 x_1 & \cdots & \tau_t x_1 & -2\,\mathrm{Im}\,\tau_t x_1 \\ \sigma_1 x_2 & \cdots & \sigma_s x_2 & \tau_1 x_2 & -2\,\mathrm{Im}\,\tau_1 x_2 & \cdots & \tau_t x_2 & -2\,\mathrm{Im}\,\tau_t x_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_1 x_n & \cdots & \sigma_s x_n & \tau_1 x_n & -2\,\mathrm{Im}\,\tau_1 x_n & \cdots & \tau_t x_n & -2\,\mathrm{Im}\,\tau_t x_n \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2^t}\left|\det\begin{pmatrix} \sigma_1 x_1 & \cdots & \sigma_s x_1 & \tau_1 x_1 & \bar{\tau}_1 x_1 & \cdots \\ \sigma_1 x_2 & \cdots & \sigma_s x_2 & \tau_1 x_2 & \bar{\tau}_1 x_2 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \sigma_1 x_n & \cdots & \sigma_s x_n & \tau_1 x_n & \bar{\tau}_1 x_n & \cdots \end{pmatrix}\right|$$

von Faktoren 2 — Faktor 2 — Faktor 2

$$= \frac{1}{2^t}\sqrt{|\mathrm{disc}(x_1, \dots, x_n)|}.$$

$\square$

16.12. **Kor.:** Sei $A = \mathbb{A} \cap K$, $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal. Dann gilt:

$$\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\sigma A) = 2^{-t}\sqrt{|\mathrm{disc}(K)|}, \quad \mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\sigma\mathfrak{a}) = 2^{-t}\sqrt{|\mathrm{disc}(K)|}\,N(\mathfrak{a}).$$

Bew.: Sei $A = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} x_i$ und $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} y_i$, schreiben $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$.
Dann ist $\mathrm{disc}(y_1, \dots, y_n) = (\det(a_{ij}))^2 \mathrm{disc}(x_1, \dots, x_n) = N(\mathfrak{a})^2 \mathrm{disc}\,K$, vgl. 8.10,
also ist $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\sigma\mathfrak{a}) \underset{16.11}{=} 2^{-t}\sqrt{|\mathrm{disc}(y_1, \dots, y_n)|} = 2^{-t} N(\mathfrak{a})\sqrt{|\mathrm{disc}(K)|}$. $\square$

16.13. **Def.:** Für $\lambda \geq 0$ setze

$$B_\lambda := \left\{(x_1, \dots, x_s, u_1, v_1, \dots, u_t, v_t) \in \mathbb{R}^n;\ \sum_{i=1}^s |x_i| + 2\sum_{j=1}^t \sqrt{u_j^2 + v_j^2} \leq \lambda\right\}.$$

16.14. **Lemma:** B_λ ist symmetrisch bzgl. 0 und konvex, sowie kompakt.
Es gilt $vol(B_\lambda) = 2^s \left(\frac{\pi}{2}\right)^t \frac{\lambda^n}{n!}$.

Bew.: Für $(s,t) \neq (0,0)$ und $s+2t=n$ sei $V_{s,t}(\lambda) := vol(B_\lambda)$.
Weiter sei $V_{(0,0)}(\lambda) := 1$. Zeigen mit vollst. Induktion nach t und s:
$V_{s,t}(\lambda) \overset{!}{=} 2^s \left(\frac{\pi}{2}\right)^t \frac{\lambda^n}{n!}$. $t=0$: Vollst. Ind. nach s: $s=0$: ✓, $s \rightsquigarrow s+1$:
Es gilt

$$V_{s+1,0}(\lambda) \underset{\text{Prinzip von Cavalieri}}{=} \int_{-\lambda}^{\lambda} V_{s,0}(\lambda - |x_{s+1}|)\, dx_{s+1} = 2\int_0^{\lambda} V_{s,0}(\lambda - x)\, dx \underset{\text{Ind.vor.}}{=} 2^{s+1}\int_0^{\lambda} \frac{(\lambda-x)^s}{s!}\, dx = \frac{2^{s+1}}{s!} \cdot \frac{-(\lambda-x)^{s+1}}{s+1}\Big|_0^{\lambda} = \frac{2^{s+1}}{(s+1)!}\lambda^{s+1} \checkmark$$

$t \rightsquigarrow t+1$: Es gilt:

$$V_{s,t+1}(\lambda) = \int_{\sqrt{u^2+v^2} \le \lambda/2} V_{s,t}\left(\lambda - 2\sqrt{u^2+v^2}\right) du\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\lambda/2} V_{s,t}(\lambda - 2r)\, r\, dr\, d\varphi$$

$$\underset{\text{Ind. vor.}}{=} 2\pi \cdot 2^s \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^t \cdot \frac{1}{n!}\int_0^{\lambda/2} (\lambda - 2r)^n\, r\, dr.$$

Jetzt partielle Integration, d.h. $\int f'g = fg - \int fg'$ mit $f(r) = \frac{-(\lambda-2r)^{n+1}}{2(n+1)}$, $g = r$ anwenden:

$$\int_0^{\lambda/2} (\lambda-2r)^n\, r\, dr = \int_0^{\lambda/2} \frac{(\lambda-2r)^{n+1}}{2(n+1)}\, dr = \frac{-(\lambda-2r)^{n+2}}{2\cdot 2(n+1)(n+2)}\Big|_0^{\lambda/2} = \frac{\lambda^{n+2}}{4(n+1)(n+2)},$$

also ist $V_{s,t+1}(\lambda) = 2^s \left(\frac{\pi}{2}\right)^{t+1} \frac{\lambda^{n+2}}{(n+2)!}$. ✓

Konvex: Sei $\mu + \nu = 1$ mit $\mu, \nu \geq 0$. Betr. $(\mu x_1 + \nu x_1', \dots, \mu v_t + \nu v_t') \in B_\lambda$, da

$$\sum_{i=1}^s |\mu x_i + \nu x_i'| + 2\sum_{j=1}^t \sqrt{(\mu u_j + \nu u_j')^2 + (\mu v_j + \nu v_j')^2} \le \mu \sum_{i=1}^s |x_i| + \nu \sum_{i=1}^s |x_i'|$$

$$\underset{\text{Verwende } \left\|\binom{\mu u_j + \nu u_j'}{\mu v_j + \nu v_j'}\right\| \le \mu \left\|\binom{u_j}{v_j}\right\| + \nu \left\|\binom{u_j'}{v_j'}\right\|}{+} 2\mu \sum_{j=1}^t \sqrt{u_j^2 + v_j^2} + 2\nu \sum_{j=1}^t \sqrt{u_j'^2 + v_j'^2} \le (\mu+\nu)\lambda = \lambda.$$

Symmetrisch/Kompakt: klar. □

16.15. **Satz:** Sei K ein Zk vom Grad n mit genau $2t$ nichtreellen Einbettungen in $\mathbb{C}$.
Dann enthält jedes ganze Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Element $x \neq 0$ mit

$$|N(x)| \le \left(\frac{4}{\pi}\right)^t \frac{n!}{n^n} \sqrt{|disc K|}\, N(\mathfrak{a}).$$

Bew.: Für $x \in K$ gilt:

$$|N(x)| = \prod_{i=1}^s |\sigma_i x| \cdot \prod_{j=1}^t |\tau_j x|^2 \le \left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^s |\sigma_i x| + 2\sum_{j=1}^t |\tau_j x|\right)\right)^n \quad (\circledast)$$

nach der Ungleichung $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$ vom geometrischen und arithmetischen Mittel.
Für $\lambda \geq 0$ setzen wir B_λ wie in 16.13. Dann ist B_λ symmetrisch und konvex, sowie kompakt. Nun ist nach 16.14: $vol(B_\lambda) = 2^s \left(\frac{\pi}{2}\right)^t \frac{\lambda^n}{n!}$. Wählen nun $\lambda > 0$ so, dass $2^s\left(\frac{\pi}{2}\right)^t \frac{\lambda^n}{n!} = 2^n \cdot 2^{-t}\sqrt{|disc K|}\, N(\mathfrak{a})$. Nach 16.7, dem Gitterpunktsatz von Minkowski, existiert ein $0 \neq z \in B_\lambda$ mit $z \in \sigma\mathfrak{a}$. Sei nun $z = \sigma x$ mit $0 \neq x \in \mathfrak{a}$. Dann ist

$$|N(x)| \overset{\circledast}{\le} \frac{1}{n^n}\left(\sum_{i=1}^s |\sigma_i x| + 2\sum_{j=1}^t \underbrace{|\tau_j x|}_{=\sqrt{(Re\, \tau_j x)^2 + (Im\, \tau_j x)^2}}\right)^n$$

$$\overset{\text{Def. } B_\lambda}{\le} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^n \overset{\text{Def. } \lambda}{=} \frac{1}{n^n} \cdot 2^{n-s} \frac{n!}{\pi^t}\sqrt{|disc K|}\, N(\mathfrak{a}) \overset{n-s=2t}{=} \left(\frac{4}{\pi}\right)^t \frac{n!}{n^n}\sqrt{|disc K|}\, N(\mathfrak{a}). \quad \square$$

16.16. **Bem.:** Es ist $\left(\frac{4}{\pi}\right)^t \frac{n!}{n^n}\sqrt{|\operatorname{disc} K|}$ ein verbessertes λ, vgl. 15.4.

16.17. **Def.:** Die Zahl $\left(\frac{4}{\pi}\right)^t \frac{n!}{n^n}$ heißt Minkowski-Konstante.

Beh.: Es gilt: $\left(\frac{4}{\pi}\right)^t \frac{n!}{n^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Gen. z.z.: $\frac{n^n}{n!} \geq 2^{n-1}$ für $n \geq 1$, Vollst. Ind. nach n: $n=1$: ✓, $n \rightsquigarrow n+1$: Es gilt:

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{n^n}{n!}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n} \underset{\text{Ind. Vor.}}{\geq} 2^{n-1}\cdot\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \geq 2^{n-1}\left(1+\tbinom{n}{1}\tfrac{1}{n}\right) \geq 2^n. \qquad \square$$

16.18. **Kor.:** Jede Idealklasse enthält ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ mit $N(\mathfrak{a}) \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^t \frac{n!}{n^n}\sqrt{|\operatorname{disc} K|}$.

Bew.: Genau wie bei 15.5. $\square$

16.19. **Bsp.:** (1) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Dann enthält jede Idealklasse ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ mit $N(\mathfrak{a}) \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^1 \cdot \frac{2!}{2^2}\sqrt{20} = \frac{4}{\pi}\sqrt{5} < 3$. ($\rightsquigarrow$ Sofort $h=2$ klar, da $cl(\mathfrak{p}_2) \neq e$)

(2) Sei $K = \mathbb{Q}(\omega)$ wo $\omega = e^{2\pi i/5}$, also $n=4$. Dann ist $\lambda = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{4!}{4^4}\sqrt{5^{5-2}} = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{3!}{4}5\sqrt{5} < 2$.

Somit ist $h=1$, d.h. $\mathbb{Z}[\omega]$ ist faktoriell.

16.20. **Kor.:** Es ist $\sqrt{|\operatorname{disc} K|} \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^t \frac{n^n}{n!}$, insb. ist $\operatorname{disc} K \neq \pm 1$ für $K \neq \mathbb{Q}$ (Kroneckersche Vermutung).

Bew.: Setzen $\mathfrak{a} = A$, dann ist $1 \leq |N(x)| \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^t \frac{n!}{n^n}\sqrt{|\operatorname{disc} K|}$, also $\sqrt{|\operatorname{disc} K|} \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^t \frac{n^n}{n!}$.

Für $n > 1$ ist insb. $\sqrt{|\operatorname{disc} K|} \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n/2}\cdot 2^{n-1} > 1$. $\square$