Vorlesung Zahlentheorie I (Algebraische ZT) WiSe '22/'23, hhu
K. Halupczok

Z18: Dirichletscher Einheitensatz

Stichworte: Einheitengruppe, logarithmische Darstellung, $Ln(A^\times)$ ist Gitter vom Rang $s+t-1$, Einheitensatz von Dirichlet, (System von) Grundeinheiten

---

18.1. Einleitung: Die Logarithmische Darstellung $Ln(x) = (\ln|\sigma_1 x|, \dots, \ln|\sigma_s x|, \dots \ln|\sigma_{s+t} x|)$ eines ZKs mit s vielen reellen Einbettungen $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ und $2t$ vielen Einb. $\sigma_{s+1}, \overline{\sigma_{s+1}}, \dots, \sigma_{s+t}, \overline{\sigma_{s+t}}$ dient wesentlich zum Verständnis der Einheitengruppe $A^\times$: $Ln(A^\times)$ ist in $\mathbb{R}^{s+t}$ ein Gitter bzw. diskrete UG vom Rang $s+t-1$. Dies liefert den Dirichletschen Einheitensatz, nach der jede Einheit als Produkt einer EW mit Potenzen von $s+t-1$ vielen Grundeinheiten geschrieben werden kann.

Ziel ist es nun, die Einheitengruppe $A^\times$ zu beschreiben. Dazu folgende Def.:

18.2. Def.: Sei K ein ZK vom Grad n, A der ZR von K, sowie $\sigma_1, \dots, \sigma_s$, $\tau_1, \bar\tau_1, \dots, \tau_t, \bar\tau_t$ die reellen und nichtreellen Einbettungen von K in $\mathbb{C}$ mit $n = s+2t$. Setzen $\sigma_{s+j} := \tau_j$ für $1 \le j \le t$. Dann heißt das Bild der Abb. $Ln: K^\times \to \mathbb{R}^{s+t}$, $x \mapsto (\ln|\sigma_1 x|, \dots, \ln|\sigma_s x|, \dots, \ln|\sigma_{s+t} x|)$ von x die logarithmische Darstellung von x.

18.3. Bem.: (1) Ln ist nicht injektiv.

⌜Alle Einheitswurzeln werden auf 0 abgebildet.⌟

(2) Für jede beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^{s+t}$ ist $A \cap Ln^{-1}(B)$ endlich.

⌜Es gibt ein $C > 0$: $\forall x \in K^\times$: $(Ln\, x \in B \Rightarrow \forall i: |\sigma_i x| \le C)$.
Somit gilt: Ist $Ln\, x \in B$, so sind die Koeffizienten des Mipos f von x beschränkt, etwa durch $\delta > 0$; für $x \in A$ ist f zusätzlich $\in \mathbb{Z}[T]$.
Also ist $A \cap Ln^{-1}(B)$ endlich.⌟

(3) $G := A^\times \cap \ker(Ln)$ ist also eine endliche Gruppe.

(4) G besteht genau aus den Einheitswurzeln in K. (Vgl. auch Z2.4)

⌜Wegen $|\sigma_j e^{2\pi i/m}| = 1$ ist $e^{2\pi i/m} \in \ker(Ln)$.
Da G endlich, ist also jedes $\zeta \in G$ eine Einheitswurzel.
⌜$\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ und endlicher Ordnung.⌟ ⌟

Insbesondere ist G also zyklisch. (Denn endl. UG der mult. Gr. eines Körpers sind zyklisch) vgl. [Algebra A21.2]

(5) Wegen (2) ist $Ln(A^\times) \subseteq \mathbb{R}^{s+t}$ eine diskrete UG von $\mathbb{R}^{s+t}$, nach 16.3 also ein Gitter.

18.4. Satz: $Ln(A^\times)$ ist Gitter vom Rang $s+t-1$.

Bew.: Für $u \in A^\times$ gilt: $1 = |N(u)| = \prod_{i=1}^{s} |\sigma_i u| \prod_{i=s+1}^{s+t} |\sigma_i u|^2$.

Somit ist $0 = \sum_{i=1}^{s} \ln|\sigma_i u| + 2\sum_{i=s+1}^{s+t} \ln|\sigma_i u|$,

also $Ln(A^\times) \subseteq \{y \in \mathbb{R}^{s+t};\ \sum_{i=1}^{s} y_i + 2\sum_{i=s+1}^{s+t} y_i = 0\} =: H \subseteq \mathbb{R}^{s+t}$.

Nun genügt es, z.z.: Zu jeder Linearform $f \neq 0$ auf H gibt es ein $u \in A^\times$ mit $f(Ln\, u) \neq 0$, da $\dim H = s+t-1$. [Sonst $\Gamma := Ln(A^\times) = \bigoplus_{i=1}^{r-w} \mathbb{Z}\gamma_i$ mit $\gamma_1, \dots, \gamma_{r-w} \in \Gamma$, $w \geq 1$, wähle $\gamma_{r-w+1}, \dots, \gamma_r \in L(\gamma_1, \dots, \gamma_{r-w})^\perp$ lin. unabh., betr. $f \in Hom(H, \mathbb{R})$ mit $f(\gamma_1) = \dots = f(\gamma_{r-w}) = 0$, $f(\gamma_{r-w+1}) = \dots = f(\gamma_r) = 1$, also $f \neq 0$ mit $\forall m \in \Gamma: f(m) = 0$, Wv.]

Bew. dafür:

Sei nun $r := s+t-1$. Betrachte $\mathbb{R}^{r+1} \supseteq H \longrightarrow \mathbb{R}^r$, $(y_1, \dots, y_{r+1}) \mapsto (y_1, \dots, y_r)$, ist also Iso.

Somit:

Sei $H^* \ni f \neq 0$. Dann ex. $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$, nicht alle $c_i = 0$, mit $f((y_1, \dots, y_{r+1})) = \sum_{i=1}^{r} c_i y_i$ (*).

Erweitern nun f zu einer Linearform auf $\mathbb{R}^{r+1}$ mit (*), haben also:

$Ln: A \to \mathbb{R}^{s+t} = \mathbb{R}^{r+1} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

Sei nun $\alpha := 2^n \left(\frac{1}{2\pi}\right)^t \sqrt{|disc\, K|} > 0$.

Für $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r_{>0}$ sei $\lambda_{r+1} > 0$ mit $\prod_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot \prod_{i=s+1}^{r+1} \lambda_i^2 \overset{!}{=} \alpha$.

Setze nun $S_\lambda := \{y \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^t;\ |y_i| \leq \lambda_i,\ 1 \leq i \leq r+1\}$,

d.h. also $|y_1| \leq \lambda_1, \dots, |y_s| \leq \lambda_s$, $\sqrt{u_1^2 + v_1^2} \leq \lambda_{s+1}, \dots, \sqrt{u_t^2 + v_t^2} \leq \lambda_{r+1}$.

Dann ist S_λ kompakt, konvex und zentralsymmetrisch mit

$vol(S_\lambda) = 2^s \prod_{i=1}^{s} \lambda_i \prod_{i=s+1}^{s+t} \pi \lambda_i^2 = 2^s \pi^t \alpha \geq \pi^t \alpha = 2^n \cdot 2^{-t} \sqrt{|disc\, K|} = 2^n vol(\mathbb{R}^n / \sigma A)$.

Nach 16.7 gibt es dann ein $0 \neq x_\lambda \in A$ mit $\sigma x_\lambda \in S_\lambda$,

d.h. $|\sigma_i x_\lambda| \leq \lambda_i$ für $1 \leq i \leq r+1$. Es gilt: $1 \leq |N(x_\lambda)| = \prod_{i=1}^{s} |\sigma_i x| \cdot \prod_{i=s+1}^{s+t} |\sigma_i x|^2 \leq \alpha$ (1).

Für $1 \leq i \leq s$ folgt: $\lambda_i \geq |\sigma_i x_\lambda| \geq \dfrac{1}{\prod_{j=1, j \neq i}^{s} |\sigma_j x| \cdot \prod_{j=s+1}^{s+t} |\sigma_j x|^2} \geq \dfrac{1}{\prod_{j=1, j\neq i}^{s} \lambda_j \cdot \prod_{j=s+1}^{s+t} \lambda_j^2} = \dfrac{\lambda_i}{\alpha}$.

Also folgt:
$\ln\lambda_i \geq \ln|\sigma_i x_\lambda| \geq \ln\lambda_i - \ln\alpha$, d.h. $\big|\ln|\sigma_i x_\lambda| - \ln\lambda_i\big| \leq \ln\alpha$ für $1 \leq i \leq s$.
Dies gilt auch für $s < i \leq r+1$.
⌜Ebenso, aber nur einen Faktor $|\sigma_i x_\lambda|$ im Nenner weglassen.⌟
Somit ist $\Big|\underbrace{\sum_{i=1}^{r} c_i \ln|\sigma_i x_\lambda|}_{= f(\mathrm{Lm}(x_\lambda))} - \underbrace{\sum_{i=1}^{r} c_i \ln\lambda_i}_{\text{variabel (mit } \lambda_i)}\Big| \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{r} |c_i| \ln\alpha}_{\text{fester Abstand}}$. (2)
Ungleichung (2) liefert nun: $\{f(\mathrm{Lm}(x_\lambda));\ \underline{\lambda} \in \mathbb{R}^r_{>0}\}$ ist unendlich.
Wegen (1) ist für alle $\underline{\lambda}$: $N((x_\lambda)) = |N(x_\lambda)| \leq \alpha$.
Da es nur endlich viele Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ mit $N(\mathfrak{a}) \leq \alpha$ gibt,
ex. also $x, x' \in A$ mit $(x) = (x')$ und $f(\mathrm{Lm}(x)) \neq f(\mathrm{Lm}(x'))$.
Dabei unterscheiden sich x und x' nur um eine Einheit,
schreiben also $x' = \mu x$ mit $\mu \in A^\times$. Dann ist also $\mathrm{Lm}\,\mu = \mathrm{Lm}\,x' - \mathrm{Lm}\,x$,
und $f(\mathrm{Lm}\,\mu) = f(\mathrm{Lm}\,x') - f(\mathrm{Lm}\,x) \neq 0$. Dieser $\mu \in A^\times$ tut's also. □

18.5. Der Einheitensatz von Dirichlet / Dirichlet'scher Einheitensatz:
Sei K ein ZK mit s reellen und $2t$ nichtreellen Einbettungen in $\mathbb{C}$.
Dann ist die Einheitengruppe des Zahlrings A von K ein direktes Produkt
- einer endlichen zyklischen Gruppe, bestehend aus den Einheitswurzeln in K,
- mit einer frei abelschen Gruppe vom Rang $s+t-1$. Mit anderen Worten:

(⊛) Es gibt $\mu_1, \ldots, \mu_{s+t-1} \in A$ so, dass sich jede Einheit $\mu \in A^\times$ eindeutig in der Form $\mu = \omega \cdot \mu_1^{m_1} \cdots \mu_{s+t-1}^{m_{s+t-1}}$ mit ω Einheitswurzel, $m_1, \ldots, m_{s+t-1} \in \mathbb{Z}$ schreiben lässt.

Bew.: Haben $\mathrm{Lm}: A^\times \to \mathrm{Lm}(A^\times) \subseteq \mathbb{R}^{s+t}$, $\mathrm{Lm}(A^\times)$ ist Gitter vom Rang $s+t-1$ nach Satz 18.4. Nach 18.3 (4) ist $E := (\ker \mathrm{Lm}) \cap A^\times$ die endliche Gruppe der Einheitswurzeln in K, und es ist also $\mathrm{Lm}(A^\times)$ frei abelsche Gruppe vom Rang $s+t-1$.
Es folgt: $A^\times \cong E \times \mathrm{Lm}(A^\times)$. □

18.6. Def.: $\mu_1, \ldots, \mu_{s+t-1} \in A^\times$ mit ⊛ aus 18.5 heißt ein System von Grundeinheiten von K.