Vorlesung Zahlentheorie I (Algebraische ZT)

WiSe '22/'23, hhu
K. Halupczok

Z22: Satz von der besten Näherung

Stichworte: Satz von der besten Näherung, Satz von Lagrange zur besten Näherung, Dirichletscher Approximationssatz, KBE von π, KBE von e, $e \notin \mathbb{Q}$

22.1. Einleitung: Der Satz von der besten Näherung besagt, dass eine gute rationale Approximation an ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit kleinem Nenner bereits ein KB der KBE sein muss. Wir erhalten ferner einen konstruktiven Beweis des Dirichletschen Approximationssatzes mit KBen. Die Approximation von π und e mit KBen wird besprochen; die KBE von e enthält eine überraschende Regelmäßigkeit parat, die wir beweisen.

22.2. Satz von der besten Näherung:
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit NBen $\frac{c_k}{d_k}$. Ist $k \geq 2$ und $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $0 < b \leq d_k$ und $\frac{a}{b} \neq \frac{c_k}{d_k}$,
Dann gilt: $\quad |d_k \alpha - c_k| < |b\alpha - a|$.

22.3. Bem.: Es folgt $\left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right| < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$, da $\left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right| = |d_k\alpha - c_k| \cdot \frac{1}{d_k}$
$< |b\alpha - a| \cdot \frac{1}{d_k} = \frac{b}{d_k}\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \leq \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$.

Fazit: $\frac{c_k}{d_k}$ ist unter allen Brüchen mit Nenner $\leq d_k$ also der, der am nächsten an α liegt. Die Approximation irrationaler Zahlen durch Brüche geht also am besten mit NBen.

22.4. Def.: $\frac{m}{v} \in \mathbb{Q}$, $v \geq 1$, heißt beste Näherung an α, falls $|v\alpha - m| < |V\alpha - U|$ für alle $U, V \in \mathbb{Z}$, $0 \leq V < v$.

22.5. Bew.: OE sei $(a,b) = 1$. Da $|d_k\alpha - c_k| < \frac{1}{d_{k+1}} \leq \frac{1}{d_k + d_{k-1}} < |d_{k-1}\alpha - c_{k-1}|$ nach Satz 21.15(iii), genügt es, die Beh. mit $d_{k-1} < b \leq d_k$ zu zeigen (die volle Beh. folgt daraus induktiv).
- Ist $b = d_k$, so ist $a \neq c_k$ und $\left|\frac{a}{b} - \frac{c_k}{d_k}\right| \geq \frac{1}{d_k}$.

Nach Lemma 21.3 ist $\left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right| \leq \frac{1}{d_k d_{k+1}} < \frac{1}{2d_k}$ da $d_{k+1} \geq 3$ (da $k \geq 2$).
Die Δ-Unglg. zeigt $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \left|\frac{a}{b} - \frac{c_k}{d_k}\right| - \left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right| > \frac{1}{d_k} - \frac{1}{2d_k} = \frac{1}{2d_k} > \left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right|$,
dieses mal $b = d_k$ zeigt die Beh.

• Ist $d_{k-1} < b < d_k$, so hat das lineare Gleichungssystem

$$c_k x + c_{k-1} y = a, \quad d_k x + d_{k-1} y = b$$

die eindeutige Lösung $x = \frac{a d_{k-1} - b c_{k-1}}{c_k d_{k-1} - c_{k-1} d_k} \underset{20.18\,(iii)}{=} \pm (a d_{k-1} - b c_{k-1}) \neq 0$,

und $y = \frac{-a d_k + b c_k}{c_k d_{k-1} - c_{k-1} d_k} \underset{20.18\,(iii)}{=} \mp (a d_k - b c_k) \neq 0$,

Cramer → $\det\begin{pmatrix} a & c_{k-1} \\ b & d_{k-1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det}$ und $\det\begin{pmatrix} c_k & a \\ d_k & b \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det}$

Es sind $x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit verschiedenem VZ, da ja $d_k x + d_{k-1} y = b$ ergibt und da $d_{k-1} < b < d_k$ laut Fall-Ann. Da auch $d_k \alpha - c_k$, $d_{k-1}\alpha - c_{k-1}$ versch. VZ haben, haben $x(d_k\alpha - c_k)$, $y(d_{k-1}\alpha - c_{k-1})$ dasselbe VZ. Da $b\alpha - a = x(d_k\alpha - c_k) + y(d_{k-1}\alpha - c_{k-1})$, erhalten wir $|b\alpha - a| > |d_{k-1}\alpha - c_{k-1}| > |d_k \alpha - c_k|$, was zu zeigen war. □

22.6. Satz (Lagrange): (i) Zwischen zwei aufeinanderfolgenden NBen bei der KBE eines beliebigen $\alpha \in \mathbb{R}$ ist mindestens einer, $\frac{c}{d}$, mit $|\alpha - \frac{c}{d}| < \frac{1}{2d^2}$.
(ii) Ist $\frac{c}{d}$ weiter ein gekürzter Bruch, der diese Unglg. löst, dann ist $\frac{c}{d}$ ein NB der KBE von α.

Bew.: (i): Da die NBe immer abwechselnd kleiner und größer α sind, gilt
$$\left|\frac{c_{k+1}}{d_{k+1}} - \frac{c_k}{d_k}\right| = \left|\alpha - \frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}\right| + \left|\frac{c_k}{d_k} - \alpha\right|.$$
Angenommen, die zu zeigende Unglg. wäre falsch für c_k/d_k und c_{k+1}/d_{k+1}. Wegen 20.18 (iii) gilt dann
$$\frac{1}{d_{k+1} d_k} = \left|\frac{c_{k+1} d_k - c_k d_{k+1}}{d_k d_{k+1}}\right| = \left|\frac{c_{k+1}}{d_{k+1}} - \frac{c_k}{d_k}\right| \geq \frac{1}{2 d_{k+1}^2} + \frac{1}{2 d_k^2}.$$
Daraus folgt $(d_{k+1} - d_k)^2 \leq 0$, also "=", so dass $k = 0, q_1 = 1$ und $d_1 = d_0 = 1$.
In diesem Fall gilt $0 < \frac{c_1}{d_1} - \alpha = 1 - [0;1,q_2,q_3,\dots] < 1 - \frac{q_2}{q_2+1} \leq \frac{1}{2}$, also auch die Beh.

(ii): Es gelte die Unglg. in 22.6. Nach dem Satz 22.2 von der besten Näherung gen. z.z.: $\frac{c}{d}$ ist eine beste Näherung an α. ⊛
Dazu sei $\frac{u}{v} \neq \frac{c}{d}$ ein Bruch mit $|v\alpha - u| \leq |d\alpha - c| < \frac{1}{2d}$.
Es folgt $\frac{1}{dv} \leq \left|\frac{c}{d} - \frac{u}{v}\right| \leq \left|\alpha - \frac{c}{d}\right| + \left|\frac{u}{v} - \alpha\right| < \frac{1}{2d^2} + \frac{1}{2dv} = \frac{v+d}{2d^2 v} \Rightarrow 2d < v + d$.
Dies zeigt $d < v$. Also ist $\frac{c}{d}$ eine beste Näherung an α.

Zu ⊛:

• Sei $d_{k-1} < d < d_k$. Dann $|d\alpha - c| \underset{c/d \text{ b.N.},\, d_{k-1} < d}{<} |d_{k-1}\alpha - c_{k-1}|$, ↯ zu $|d\alpha - c| > |d_{k-1}\alpha - c_{k-1}|$ laut 22.2 bzw. 22.5 Bew.ende

• Also $d = d_k$ für ein k. Wäre $\frac{c_k}{d} \neq \frac{c}{d}$, folgte $|d\alpha - c_k| < |d\alpha - c|$ aus 22.2, [da dies $< \frac{1}{2d} \leq \frac{1}{2}$, ↯. dann wäre c/d keine beste Näherung ↯.] $> 1/2$: c_k, $d\alpha$, c □

Bem.: Wie gut die Näherungen mit KBen sind, besagt folgende Abschätzung, welche eine Verbesserung von Lemma 21.3 bzw. Satz 21.15 darstellt.

22.7. **Satz:** Für eine KBE $\alpha = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_k, S_{k+1}]$ an $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit NBen $\frac{c_k}{d_k}$ gilt

$$\alpha - \frac{c_k}{d_k} = \frac{(-1)^k}{d_k(S_{k+1}d_k + d_{k-1})}, \quad k \geq 2.$$

Speziell: $\left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right| < \frac{1}{q_{k+1} d_k^2}$ für $k \geq 1$.

Bew.: Haben $\alpha - \frac{c_k}{d_k} \overset{21.2(iii)}{=} \frac{S_{k+1} c_k + c_{k-1}}{S_{k+1} d_k + d_{k-1}} - \frac{c_k}{d_k} = \frac{c_{k-1} d_k - c_k d_{k-1}}{d_k(S_{k+1} d_k + d_{k-1})}$, mit 20.18(iii) folgt die 1. Beh.

Da $q_{k+1} \leq S_{k+1}$, folgern wir daraus, dass $\left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right| \leq \frac{1}{d_k(q_{k+1} d_k + d_{k-1})}$, also folgt auch $\left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right| < \frac{1}{d_k \cdot d_k q_{k+1}}$ wie behauptet. □

22.8. **Bem.:** Satz 22.7/Lemma 21.3 gibt einen expliziten Beweis des Dirichletschen Approximationssatzes: Sei $X \geq 1$ reell und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ex. gekürzter Bruch $\frac{a}{q}$ mit $1 \leq q \leq X$ und $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{qX}$ $\Leftrightarrow$ $|q\alpha - a| \leq \frac{1}{X}$. ⌈Insb. gilt $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$.⌋

Bew.: Nimm NB $\frac{c_k}{d_k}$ mit $d_k \leq X < d_{k+1}$, also $\frac{a}{q} := \frac{c_k}{d_k}$: Nach Satz 22.7 (Lemma 21.3) ist $\left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right| < \frac{1}{d_k d_{k+1}} \leq \frac{1}{d_k X}$. □

Bem.: • Dies gibt Auskunft, wie rationale Approximationen an α explizit berechnet werden können (nämlich mit Hilfe von NBen der KBE an α). ⌈Bei vorgegebener maximaler Nennergröße X in einer Laufzeit von nur $O(\log X)$.⌋

• Andere Beweise des Dirichletschen Approximationssatzes sind nicht konstruktiv, d.h. zeigen nur die Ex. mit (Dirichletschem) Schubfachschluss.

22.9. Die KBE von π: Es ist $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 21, 31, 14, 2, 1, 2 \dots]$

Die Approximation von π durch Brüche ist ein altes Problem, die heutige Dezimalbruchentwicklung ist nur eine Möglichkeit dafür. Die KBE von π liefert dafür eine systematische und optimale Approximation mit Bruchzahlen. ("optimal" im Sinne des Satzes von der besten Näherung)

Bricht man die KBE von π vor 292 ab, so erhält man mit $\frac{355}{113} = [3, 7, 15, 1] = \frac{c_3}{d_3}$ eine ziemlich gute Approximation:

Da $q_4 = 292$ groß ist im Vgl. zu $d_3 = 113$, zeigt obige Abschätzung in Satz 22.5, nämlich

$$0 < \frac{355}{113} - \pi < \frac{1}{292 \cdot 113^2} = 0.0000002682\ldots$$

Weiter hat der nächste Näherungsbruch einen sehr großen Nenner, nämlich $d_4 = q_4 d_3 + d_2 = 292 \cdot 113 + 106 = 33102$.

Der Bruch $\frac{355}{113}$ ist also eine sehr gute Approximation an π mit "kleinem" Nenner.

Einige historische Werte:

- Papyrus Rhind (≈ 1650 v.u.Z.): $\pi \approx 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3.16\ldots$
- Altes Testament (≈ 1000 v.u.Z.): $\pi \approx 3$
- Archimedes (287–212 v.u.Z.): $\pi \approx \frac{22}{7} = [3, 7] = 3.142\ldots$
- Tsu Chung Chi (≈ 500 n.u.Z.): $\pi \approx \frac{355}{113} = 3.1415929\ldots$, s.o.

22.10. **Bem.:** Die KBE von π ist unregelmäßig, hingegen ist

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \ldots + \cfrac{(2n+1)^2}{2 + \ldots}}}}$$

(geht zurück auf Leibniz' Formel $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \ldots$)

Verfolgen dies nicht weiter, da dies kein natürlicher KB ist. Behandeln stattdessen noch die KBE von e:

22.11. Die KBE von e: ist "der Walzer"

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \ldots]$$

22.12. **Kor.:** $e \notin \mathbb{Q}$. [Euler 1748, damals noch ohne vollst. Beweis]

Bew.: e hat nach 22.11 eine unendliche KBE, jetzt Satz 20.18(ii). □

22.13a) **Lemma:** Für $m \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$, sei

$$\alpha_m := \frac{1}{m!} \int_0^1 x^m (1-x)^m \exp\left(\frac{2x}{k}\right) dx, \qquad \beta_m := \frac{1}{m!} \int_0^1 x^{m+1} (1-x)^m \exp\left(\frac{2x}{k}\right) dx.$$

Dann: (i) $\alpha_0 = \frac{k}{2}\left(\exp\left(\frac{2}{k}\right) - 1\right)$, $\beta_0 = \frac{k}{2} \exp\left(\frac{2}{k}\right) - \left(\frac{k}{2}\right)^2 \cdot \left(\exp\left(\frac{2}{k}\right) - 1\right)$.

(ii) $\frac{2}{k} \alpha_m + \alpha_{m-1} = 2\beta_{m-1}$, $k(2m+1)\alpha_m = k\beta_{m-1} - 2\beta_m$.

Bew.: (i): $\alpha_0 = \int_0^1 \exp\left(\frac{2x}{k}\right) dx = \frac{k}{2} \exp\left(\frac{2}{k} \cdot t\right)\Big|_0^1 = \frac{k}{2}\left(\exp\left(\frac{2}{k}\right) - 1\right)$ ✓

$$\beta_0 = \int_0^1 \underbrace{x}_{v} \underbrace{\exp\left(\frac{2x}{k}\right)}_{u'} dx \overset{PI}{=} \frac{k}{2} \exp\left(\frac{2}{k} \cdot t\right) \cdot t \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{k}{2} \exp\left(\frac{2x}{k}\right) dx = \frac{k}{2} \exp\left(\frac{2}{k}\right) - \left(\frac{k}{2}\right)^2 \left(\exp\left(\frac{2}{k}\right) - 1\right). \checkmark$$

$$\alpha_n := \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(1-x)^n \exp\left(\frac{2x}{k}\right)dx, \qquad \beta_n := \frac{1}{n!}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^n \exp\left(\frac{2x}{k}\right)dx.$$

(ii): Zeigen nun die Rekursionsformeln für α_n, β_n per partieller Integration.

- Zunächst ist $\frac{d}{dx} x^n(1-x)^n = n x^{n-1}(1-x)^n - n x^n(1-x)^{n-1} = n(1-x-x)x^{n-1}(1-x)^{n-1}$

$$= n(1-2x)x^{n-1}(1-x)^{n-1} = n\underbrace{x^{n-1}(1-x)^{n-1}}_{\rightsquigarrow \text{ in } n\alpha_{n-1}} - \underbrace{2n x^n(1-x)^{n-1}}_{\rightsquigarrow \text{ in } 2n\beta_n} \quad \circledast$$

$\rightsquigarrow$ Vorbereitung für α_n'

- Also: $$2\beta_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\cdot 2\int_0^1 x^n(1-x)^{n-1}\exp\left(\frac{2x}{k}\right)dx \overset{\circledast}{=} -\frac{1}{n!}\int_0^1 \underbrace{\frac{d}{dx}\left(x^n(1-x)^n\right)}_{u'}\underbrace{\exp\left(\frac{2x}{k}\right)}_{v}dx + \alpha_{n-1}$$

$v' = \frac{2}{k}\exp\left(\frac{2x}{k}\right)$

$$\overset{p.I.}{=} \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(1-x)^n\cdot\frac{2}{k}\exp\left(\frac{2x}{k}\right)dx + \alpha_{n-1} = \frac{2}{k}\alpha_n + \alpha_{n-1},$$ die erste Rekursion. ✓

- Weiter ist $$\underbrace{x^n(1-x)^{n-1}}_{\text{in } \beta_{n-1}} = x^n(1-x)^{n-1}(1-x+x) = \underbrace{x^n(1-x)^n}_{\text{in } \alpha_n} + \underbrace{x^{n+1}(1-x)^{n-1}}_{\text{in } x\beta_n},$$

also $$x^{n+1}(1-x)^{n-1} = x^n(1-x)^{n-1} - x^n(1-x)^n, \quad \oplus$$

so dass $$\frac{d}{dx}x^{n+1}(1-x)^n = (n+1)x^n(1-x)^n - x^{n+1}n(1-x)^{n-1}$$

$$= (1-x)^{n-1}\Big(\underbrace{(n+1)x^n(1-x) - nx^{n+1}}_{= nx^n - 2nx^{n+1} + x^n(1-x) = (n+1)x^n - (2n+1)x^{n+1}}\Big)$$

$$= (n+1)x^n(1-x)^{n-1} - (2n+1)\underbrace{x^{n+1}(1-x)^{n-1}}_{\overset{\oplus}{=} x^n(1-x)^{n-1} - x^n(1-x)^n}$$

$$= -nx^n(1-x)^{n-1} + (2n+1)x^n(1-x)^n. \quad \boxtimes$$

- Also: $$k\beta_{n-1} - 2\beta_n = \frac{k}{(n-1)!}\int_0^1 x^n(1-x)^{n-1}\exp\left(\frac{2x}{k}\right)dx - \frac{2}{n!}\int_0^1 \underbrace{x^{n+1}(1-x)^n}_{u,\ u' = \boxtimes}\underbrace{\exp\left(\frac{2x}{k}\right)}_{v',\ v = \frac{k}{2}\exp\left(\frac{2x}{k}\right)}dx$$

$$\overset{pI,\boxtimes}{=} \frac{k}{(n-1)!}\int_0^1 x^n(1-x)^{n-1}\exp\left(\frac{2x}{k}\right)dx + \frac{k}{n!}\int_0^1\left(-nx^n(1-x)^{n-1} + (2n+1)x^n(1-x)^n\right)\exp\left(\frac{2x}{k}\right)dx$$

$$= \frac{k}{n!}\int_0^1\left(nx^n(1-x)^{n-1} - nx^n(1-x)^{n-1} + (2n+1)x^n(1-x)^n\right)\exp\left(\frac{2x}{k}\right)dx$$

$$= \frac{k}{n!}\int_0^1 (2n+1)x^n(1-x)^n\exp\left(\frac{2x}{k}\right)dx = (2n+1)k\alpha_n,$$ die 2. Rekursion. ✓ □

22.13. b) **Lemma:** Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{\exp(2/k)+1}{\exp(2/k)-1} = [k; 3k, 5k, 7k, \dots]$.

Bew.: • Können die β_m eliminieren, erhalten:

$$\frac{2}{k}\alpha_{m+1} + k(2m+1)\alpha_m = \frac{k}{2}\left(\frac{2}{k}\alpha_m + \alpha_{m-1}\right) - \alpha_m = \frac{k}{2}\alpha_{m-1},$$

bzw. $$\frac{2\alpha_{m+1}}{k\alpha_m} + (2m+1)k = \frac{k\alpha_{m-1}}{2\alpha_m} \quad (*).$$

• Also ist $\alpha_1 = \frac{k}{2}(2\beta_0 - \alpha_0) = \left(\frac{k}{2}\right)^2\left(\exp(2/k) + 1 - k(\exp(2/k) - 1)\right)$,

und
$$\frac{\exp(2/k)+1}{\exp(2/k)-1} = \frac{\left(\frac{2}{k}\right)^2\alpha_1 + k(\exp(2/k)-1)}{\frac{2}{k}\alpha_0} = \frac{\left(\frac{2}{k}\right)^2\alpha_1 + 2\alpha_0}{\frac{2}{k}\alpha_0} = k + \frac{2\alpha_1}{k\alpha_0}.$$

Für $m \in \mathbb{N}$ gilt $2\alpha_{m+1} < k\alpha_m$, mit $(*)$ folgt
$$\frac{\exp(2/k)+1}{\exp(2/k)-1} = k + \left(\frac{k\alpha_0}{2\alpha_1}\right)^{-1} = \left[k; 3k, \frac{k\alpha_1}{2\alpha_2}\right].$$

Jetzt Induktion nach m. □

22.14. **Bew. von 22.11:** Lemma 22.13 b) mit $k=2$ zeigt $\frac{e+1}{e-1} = [2, 6, 10, 14, \dots]$. Sei $\frac{c_k}{d_k}$ der k-te NB.

Weiter sei $E := [A_0; A_1, A_2, \dots]$ mit $A_0 = 2$, $A_{3k-2} = A_{3k} = 1$, $A_{3k-1} = 2k$, und sei $\frac{u_k}{v_k}$ der k-te NB an E. Z.z.: $u_{3k+1} = c_k + d_k$, $v_{3k+1} = c_k - d_k$. $(*)$

⌜Denn dann ist $E = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{u_{3k+1}}{v_{3k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{c_k/d_k + 1}{c_k/d_k - 1} = \frac{\frac{e+1}{e-1}+1}{\frac{e+1}{e-1}-1} = e.$ ⌟

Um $(*)$ zu zeigen, gehen wir vor mit Ind. nach k. Für $k = 0, 1$ gilt $(*)$.

Für $k \geq 2$ ist
$$\begin{aligned} c_k &= (2+4k)c_{k-1} + c_{k-2}, \\ d_k &= (2+4k)d_{k-1} + d_{k-2}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt mit den (A_k) weiter
$$\begin{aligned} u_{3k-3} &= u_{3k-4} + u_{3k-5} \\ u_{3k-2} &= u_{3k-3} + u_{3k-4} \\ u_{3k-1} &= 2k\, u_{3k-2} + u_{3k-3} \\ u_{3k} &= u_{3k-1} + u_{3k-2} \\ u_{3k+1} &= u_{3k} + u_{3k-1} \end{aligned}$$

und analog für die v_k. Durch Mult. mit $1, -1, 2, 1$ bzw. 1 erhalten wir

$u_{3k+1} = (2+4k)u_{3k-2} + u_{3k-5}$, $v_{3k+1} = (2+4k)v_{3k-2} + v_{3k-5}$.

Dies zeigt $v_{3k+1} = (2+4k)(c_{k-1} + d_{k-1}) + c_{k-2} + d_{k-2} = c_k + d_k$,

analog $u_{3k+1} = c_k - d_k$. Dies zeigt $(*)$. □