Vorlesung Zahlentheorie I (Algebraische ZT)

WiSe '22/'23, hhu
K. Halupczok

Z23: Klassische Approximationssätze

Stichworte: Irrationalitätskriterium, Satz von Liouville, Liouvillezahlen, Satz von Roth, Satz von Lindemann-Weierstraß → Transzendenz von e und π

23.1. Einleitung: Wir untersuchen die Güte der Approximation irrationaler bzw. algebraischer Zahlen durch Brüche. Die Überlegungen führen zur expliziten Konstruktion transzendenter Zahlen.
Nach dem Approximationssatz von Dirichlet gibt es für ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, d.h. α irrational, unendlich viele rationale Zahlen $\frac{a}{q}$ mit $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ (laut Beweis dort nämlich die unendliche Folge der NBe an α).
Diese Eigenschaft charakterisiert irrationale Zahlen:

23.2. Satz: Ist $\alpha \in \mathbb{Q}$, so gibt es nur endl. viele Approximationen $\frac{a}{q}$ mit $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

Bew.: Sei $\alpha = \frac{c}{b}$, $c \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$. Für $\frac{c}{b} \neq \frac{a}{q}$ ist $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| = \frac{|cq - ab|}{bq} \geq \frac{1}{bq}$,
mit $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ folgt $b > q$, so dass nur endl. viele q (und auch a) möglich sind. □

[Somit: Ex. ∞ viele $\frac{a}{q}$, $(a,q)=1$, mit $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ $\Rightarrow \alpha \notin \mathbb{Q}$.]

Dies kann noch verschärft werden (aber offenbar nicht noch besser als so):

23.3. Satz: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Gibt es unendl. viele Lösungen a, q von $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\varepsilon}}$, $(a,q)=1$, für ein festes $\varepsilon > 0$, dann ist $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Bew.: Wäre sonst $\alpha = \frac{c}{b}$, $c \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, folgt für die Lösungen $\frac{1}{bq} \leq \frac{|cq - ab|}{bq} = \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\varepsilon}}$,
also $q < b^{1/\varepsilon}$, also gibt es nur endl. viele q. Dazu gibt es jeweils nur endl. viele passende a:
Betr. $\frac{a(t)}{q}$ mit $a(t) = a + t$, $t \in \mathbb{Z}$. Sind $\frac{a}{q}, \frac{a(t)}{q}$ Lösung, folgt
$$\frac{|t|}{q} = \left|\frac{t}{q} + \frac{a}{q} - \frac{c}{b} - \left(\frac{a}{q} - \frac{c}{b}\right)\right| \overset{\triangle}{\leq} \left|\frac{a(t)}{q} - \frac{c}{b}\right| + \left|\frac{a}{q} - \frac{c}{b}\right| < \frac{2}{q^{1+\varepsilon}}, \text{ also } |t| < 2q^{-\varepsilon} \leq 2.$$
Somit gibt es zu q höchstens drei versch. Werte für t, so dass $q, a(t)$ Lösung. □

23.4. Bsp.: $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0.11000100000\ldots \notin \mathbb{Q}$. [Bei einer 1 abbrechen $\rightsquigarrow$ $\frac{a}{q}$ in Satz 23.3.]

23.5. **Bem.:** Können Satz 23.3 noch so umformulieren: Ist $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon>0$, so gibt es ein $c>0$, so dass $|\alpha - \frac{a}{q}| > \frac{c}{q^{1+\varepsilon}}$ für alle Brüche $\frac{a}{q} \in \mathbb{Q}\setminus\{\alpha\}$ ist. ⌈Wähle: $c < \min\{|\alpha q_i - a_i|;\ i \le k\}$, $0<c<1$, für die $\frac{a_1}{q_1},\dots,\frac{a_k}{q_k}\ (\neq\alpha)$ mit $|\alpha - \frac{a_i}{q_i}| < \frac{1}{q_i^{1+\varepsilon}}$. Dann: $\forall i \le k: |\alpha - \frac{a_i}{q_i}| > \frac{c}{q_i} \ge \frac{c}{q_i^{1+\varepsilon}}$, falls $\frac{a_i}{q_i}\neq\alpha$.⌋
Rationalzahlen lassen sich also nicht "sehr gut" mit Brüchen approximieren.

Eine "schlechte" Approximation mit Brüchen gilt auch für algebraische (irrationale) Zahlen:

23.6. **Satz (von Liouville):** Sei $\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}$ mit $\deg(\alpha)=D>1$. Dann gibt es ein $c>0$, so dass $|\alpha-\frac{a}{q}| > \frac{c}{q^D}$ für alle Brüche $\frac{a}{q}$ (mit $q>0$) gilt.

Bew.: Sei f das Mipo von α, $\deg(f)=D$. Laut Mittelwertsatz ex. ξ zwischen $\frac{a}{q}$ und α mit $-f(\frac{a}{q}) = f(\alpha)-f(\frac{a}{q}) = (\alpha-\frac{a}{q})f'(\xi)$. Es sei OE $|\alpha-\frac{a}{q}|<1$. Dann ist $|\xi|<1+|\alpha|$, also $|f'(\xi)|<\frac{1}{c}$ für ein $c>0$ (Polynome sind beschränkt auf Kompakta). Es folgt $|\alpha-\frac{a}{q}| > c\,|f(\frac{a}{q})|$. Da $\frac{a}{q}$ keine Nullstelle von f sein kann (f ist irred. mit $D>1$), folgt $|q^D f(\frac{a}{q})|\ge 1$, also mit $|f(\frac{a}{q})|\ge\frac{1}{q^D}$ die Beh. □

23.7. **Bem.:** Der Satz von Liouville zeigt, dass algebraische Zahlen nicht zu gut mit Brüchen approximierbar sind. Ist $\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}$ und $\alpha=[q_0,q_1,\dots]$ die KBE von α, so folgt
$$\frac{c}{d_k^D} < \left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right| \le \frac{1}{q_{k+1}d_k^2}, \quad \text{also} \quad c\,q_{k+1} < d_k^{D-2} \quad ⊛$$
Für $D=2$ sind die Teilnenner q_k also beschränkt.
Doch sobald $\limsup_{k\to\infty}\frac{\log q_{k+1}}{\log d_k}=\infty$, gibt es für jedes $L>0$ unendl. viele NBe an α mit $q_{k+1}\ge d_k^L$, so dass ⊛ nicht gilt, also α nicht algebraisch sein kann! Dies liefert konkrete Beispiele für transzendente (= nicht algebraische Zahlen):

23.8. **Bsp.:** $\alpha=[1,10^{1!},10^{2!},10^{3!},\dots]$ ist transzendent.
⌈Haben $q_k=10^{k!}$ und $d_k = 10^{k!(1+o(1))}$, also gilt ⊛ nicht.⌋

23.9. **Def.:** $\alpha\in\mathbb{R}$ heißt Liouvillezahl, falls $\forall m\in\mathbb{N}\ \exists a_m,q_m\in\mathbb{Z}, q_m>1: 0<|\alpha-\frac{a_m}{q_m}|<\frac{1}{q_m^m}$.

23.10. **Satz:** Jede Liouvillezahl ist transzendent.

Bew.: Sei eine Liouvillezahl α ansonsten algebraisch vom Grad D. Dann folgt aus 23.6, dass $\frac{c}{q_m^D}<\frac{1}{q_m^m}$, also $c<q_m^{D-m}$. Da es unendl. viele q_m gibt, folgt ein ⚡ für $m\to\infty$. □

Die beste bekannte (und optimale) Verbesserung des Satzes von Liouville ist der

23.11. Satz von Roth: Sei $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ mit $\deg(\alpha) > 1$, sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nur endl. viele Brüche $\frac{a}{q}$ mit $|\alpha - \frac{a}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$. [Es gibt ein $C(\varepsilon) > 0$ mit $|\alpha - \frac{a}{q}| \geq \frac{C(\varepsilon)}{q^{2+\varepsilon}}$ für alle $\frac{a}{q}$, allerdings kann $C(\varepsilon)$ nicht explizit bestimmt werden.]

23.12. Bem.: Der Satz von Roth ist optimal, es kann nicht $\varepsilon > 0$ zu $\varepsilon = 0$ verbessert werden wegen dem Approximationssatz von Dirichlet.
Bemerkenswert ist, dass die Schranke im Satz von Roth nicht von D abhängt.
Der Beweis ist recht umfangreich. Langs Vermutung: Für $D \geq 3$ ist
$|\alpha - \frac{a}{q}| < \frac{1}{q^2 (\log q)^\kappa}$, $\kappa > 1$, wohl nur endl. oft möglich.
Eine andere Verschärfung des Satzes von Roth ist äquivalent zur abc-Vermutung.

23.13. Bem.: In der Theorie der transzendenten Zahlen gibt es bis heute viele offene Fragen. So ist die Menge der algebraischen Zahlen in $\mathbb{R}$ abzählbar, d.h. "fast" alle reellen Zahlen sind transzendent. Dennoch ist es von konkreten reellen Zahlen nur schwer möglich, ihre Transzendenz nachzuweisen.
Die Transzendenz von e und π nach Hermite/Lindemann u.a. wird heute zusammengefasst als:

23.14. Satz von Lindemann-Weierstraß: Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ verschieden und algebraisch, sowie $\beta_1, \ldots, \beta_n \neq 0$ algebraisch, so ist $\beta_1 e^{\alpha_1} + \ldots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0$.
Ohne Beweis. Siehe z.B. Thm. 1.4 in [Baker: Transcentental number theory].
Dies zeigt z.B. die Transzendenz von e, und aus $e^{i\pi} + 1 = 0$ folgt die von π.
[mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{Q}$]