

Langes Inhaltsverzeichnis

Z1: Die Fermatsche Vermutung

Algebraische ZT: Einführung anhand der Fermatschen Vermutung, pythagoräische Tripel, indische Formeln, Beitrag von Kummer zur F.V., Kummersches Lemma

Z2: Kummersches Lemma

Beweis des Kummerschen Lemmas

Z3: Zahlkörper und Zahlringe

Ganze Elemente in Komm. Ringen, ganzer Abschluss von A in B , B ganz über A , ganz abgeschlossen, ganz algebraisch, Zahlkörper/Zahlring

Z4: Quadratische Zahlringe

Stichworte: reeller oder imaginärer quadratischer Zahlkörper, Zahlring davon, halbganze Zahlen, alle normenklidischen imaginärquadratischen Zahlkörper, Problem der Bestimmung der faktoriellen quadratischen Zahlkörper

Z5: Kreisteilungskörper

n -ter Kreisteilungskörper K_n , n -te Einheitswurzeln ϵ_n , $\text{Gal}(K_n/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, alle EW im Kreisteilungskörper, Kreisteilungspolynome sind irreduzibel

Z6: Norm, Spur, Diskriminante

Norm, Spur in Zahlkörpern, Einheitengruppe (insb. imag. qu. Zk), Schachtelungssatz, Diskriminante, Norm/Spur/disc ganzes Element ist ganz, Diskriminante normaler Zahlkörpererweiterungen, $\text{disc}(x)$, disc einer EW, Satz von Kronecker-Weber

Z7: Quadratisches Reziprozitätsgesetz

Legendre-Symbol, Satz von Euler, QRG mit Galoistheorie,
Beweis der EGR, Jacobi-Symbol, Vermeidung der Faktorisierung, Lösung von $x^2 \equiv a \pmod{p}$

Z8: Die additive Struktur von Zahlringen

Ganheitsbasis, disc K für Zahlkörper K , disc von quadratischen
Zahlkörpern, Beweis von $|N(x)| = \#A/Ax$ mit einer GHB

Z9: Zahlring des Kreisteilungskörpers

Zahlring des Kreisteilungskörpers, Kompositum, Zahlring des Kompositums

Z10: Dedekindbereiche I

$\mathbb{Z}$ -bz, Dedekindbereich z.B. $\mathbb{H}/B$, $\mathbb{Z}[R]$, gebrochenes (Haupt-)Ideal,
ganzes Ideal, Inverse von Primidealen, End. zerl. von $\mathfrak{p}\mathbb{Z}$ in Primideale

Z11: Dedekindbereiche II

End. zerl. von $\mathfrak{p}\mathbb{Z}$ in Primideale = $\mathbb{P}\mathbb{I}\mathbb{Z}$, Dedekindbereich: faktoriell $\Leftrightarrow \mathbb{H}/B$,
 $\mathfrak{p}\mathbb{Z} \mid \mathfrak{p}\mathbb{Z}$, Idealnorm $N(\mathfrak{p}\mathbb{Z})$ ist multiplikativ

Z12: Zerlegungsverhalten von Primidealen

Zerlegungsproblem von $B/\mathfrak{p}$, Verzweigungsindex $e(\mathfrak{p}\mathbb{Z} \mid \mathfrak{p})$, Trägheitsgrad
 $f(\mathfrak{p}\mathbb{Z} \mid \mathfrak{p})$, Formel $n = \sum_{i=1}^r e_i f_i$, zerlegt/verzweigt/träge Primideale, explizite $\mathbb{P}\mathbb{I}\mathbb{Z}$ in L/K

Z13: Explizite Primidealzerlegungen

Explizite $\mathbb{P}\mathbb{I}\mathbb{Z}$ im quadratischen $\mathbb{Z}K$ und im Kreisteilungskörper,
verzweigte $\mathbb{P}\mathbb{Z}$ = Primteiler von disc K und Ausartung der bilinearen Spurform von $A/A_{\mathfrak{p}}$

Z14: PIZ in normalen Erweiterungen

L/K normal $\Rightarrow$ alle e_i gleich,
und je zwei σ_i über K werden von einem $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ aufeinander abgebildet.

Z15: Idealklassengruppe, Klassenzahl

Idealklassengruppe, Klassenzahl, Normschränke mit $\lambda = \prod_i \left(\sum_j |a_j x_j| \right)$,
Satz von Dirichlet $h < \infty$, Auffinden der Klassenzahl im Beispiel

Z16: Gitter und diskrete Gruppen

diskrete UG des $\mathbb{R}^n$, Gitter, Fundamentalbereich/Grundmasche,
Gitterpunktsatz von Minkowski, Kanonische Einbettung von K in $\mathbb{C}$,
Minkowski-Konstante, Kronecker-Vermutung

Z17: Satz von Hermite

Satz von Hermite: Es gibt nur endl. viele ZK mit vorgegebener Diskriminante.

Z18: Dirichletscher Einheitensatz

Einheitsgruppe, logarithmische Darstellung, $\text{Ln}(A^*)$ ist Gitter vom
Rang $s+t-1$, Einheitensatz von Dirichlet, (System von) Grundeinheiten

Z19: Pell'sche Gleichung

Grundeinheiten quadratischer ZK, Pell'sche Gleichung

Z20: Kettenbrüche

eukl. Algo = endliche KBE, Teilnenner, k -ter Rest S_k , Näherungsbruch $\frac{S_k}{d_k}$,
Rekursionen für NBe, Matrizennotation dafür, Alternieren der NBe,
Darstellung eines KBs mit k -tem Rest

Z21: Konvergenz unendlicher Kettenbrüche

Kgtz. Satz über unendl. KBe, Abstand von α zu den NBen, natürlicher KB, α rational $\Leftrightarrow$ KBE endlich, Eindeutigkeit der KBE, normierter KB, Mediant, Zwischenbruch, schneller Algorithmus zur Berechnung von Bézout-Elementen/modularer Inverser

Z22: Satz von der besten Näherung

Satz von der besten Näherung, Satz von Lagrange zur besten Näherung, Dirichletscher Approximationssatz, KBE von π , KBE von e , $e \notin \mathbb{Q}$

Z23: Klassische Approximationssätze

Irrationalitätskriterium, Satz von Liouville, Liouvillezahlen, Satz von Roth, Satz von Lindemann-Weierstraß $\rightarrow$ Transzendenz von e und π

Z24: Kettenbrüche und quadratische Irrationalzahlen

KBE quadr. Irrationalzahlen, periodischer KB, Satz von Euler & Lagrange über periodische KBe, Satz von Galois zu reinperiodischen KBen, KBe von $\sqrt{m}$ und Palindrome

Z25: Pell'sche Gleichung und KBE

Pell'sche Gleichung, Grundeinheiten in $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, Schnelles Potenzieren, KBE von $\sqrt{m}$ und Pell-Lösungen, Berechnung der Minimallösungen

Ende der Vorlesung