Vorlesung Zahlentheorie I (Algebraische ZT)

WiSe '22/'23, Uhu
K. Halupczok

Langes Inhaltsverzeichnis

Z7: Quadratisches Reziprozitätsgesetz

Legendre-Symbol, satz von Euler, QRG mit Galoistheorie, Beweis des EGs, Jacobi-Symbol, Vermeidung der Faktorisierung, Lösung von $x^2 \equiv a \ (p)$

Z8: Die additive Struktur von Zahlringen

Ganzheitsbasis, disc K für Zahlkörper K, disc von quadratischen Zahlkörpern, Beweis von $|N(x)| = \#A/Ax$ mit einer GHB

Z9: Zahlring des Kreisteilungskörpers

Zahlring des Kreisteilungskörpers, Kompositum, Zahlring des Kompositums

---

Z10: Dedekindbereiche I

$\mathfrak{o}$ - br, Dedekindbereich z.B. HIB, ZR, gebrochenes (Haupt) Ideal, ganzes Ideal, Inverse von Primidealen, Eind. zerl. von $\mathfrak{o}$ in Primideale

---

Z11: Dedekindbereiche II

Eind. zerl. von $\mathfrak{o}$ in Primideale = PIZ, Dedekindbereich: faktoriell ($\Leftarrow$) HIB, $\mathfrak{b} \mid \mathfrak{o}$, Idealnorm $N(\mathfrak{o})$ ist multiplikativ

---

Z12: Zerlegungsverhalten von Primidealen

Zerlegungsproblem von $B/\mathfrak{p}$, Verzweigungsindex $e(\mathfrak{o}_f \mid \mathfrak{p})$, Trägheitsgrad $f(\mathfrak{o}_f \mid \mathfrak{p})$, Formel $n = \sum_{i=1}^{r} e_i f_i$, zerlegte/verzweigte/träge Primideale, explizite PIZ in $L|K$

Z13: Explizite Primidealzerlegungen

Explizite PIZ im quadratischen ZK und im Kreisteilungskörper, verzweigte PZ = Primteiler von disc K und Ausartung der bilinearen Spurform von A/Ap

---

Z14: PIZ in normalen Erweiterungen

$L|k$ normal $\Rightarrow$ alle e_i gleich,
und je zwei $\mathfrak{p}_i$ über $\mathfrak{p}$ werden von einem El. $\sigma \in Gal(L|k)$ aufeinander abgebildet.

Z15: Idealklassengruppe, Klassenzahl

Idealklassengruppe, Klassenzahl, Normschranke mit $\lambda := \frac{1}{i!}\left(\frac{4}{\pi}\right)^t \sum_j |\sigma_i x_j|$,
Satz von Dirichlet $h < \infty$, Auffinden der Klassenzahl im Beispiel

---

Z16: Gitter und diskrete Gruppen

diskrete UG des $\mathbb{R}^n$, Gitter, Fundamentalbereich/Grundmasche,
Gitterpunktsatz von Minkowski, Kanonische Einbettung von K in $\mathbb{C}$,
Minkowski-Konstante, Kronecker-Vermutung

Z17: Satz von Hermite

Satz von Hermite: Es gibt nur endl. viele ZK mit vorgegebener Diskriminante.

Z18: Dirichletscher Einheitensatz

Einheitengruppe, logarithmische Darstellung, $Ln(A^\times)$ ist Gitter vom Rang $s+t-1$, Einheitensatz von Dirichlet, (System von) Grundeinheiten

---

Z19: Pellsche Gleichung

Grundeinheiten quadratischer ZK, Pellsche Gleichung

Z20: Kettenbrüche

endl. Algo = endliche KBE, Teilnenner, k-ter Rest s_k, Näherungsbruch $\frac{c_k}{d_k}$,
Rekursionen für NBe, Matrizennotation dafür, Alternieren der NBe,
Darstellung eines KBs mit k-tem Rest

Z21: Konvergenz unendlicher Kettenbrüche

Kgz.satz über unendl. KBe, Abstand von α zu den NBen, natürliche KB, α rational $\Leftrightarrow$ KBE endlich, Eindeutigkeit der KBE, normierten KB, Mediante, Zwischenbruch, schneller Algorithmus zur Berechnung von Bézout-Elementen / modularer Inverser

---

Z22: Satz von der besten Näherung

Satz von der besten Näherung, Satz von Lagrange zur besten Näherung, Dirichletscher Approximationssatz, KBE von π, KBE von e, $e \notin \mathbb{Q}$

Z23: Klassische Approximationssätze

Irrationalitätskriterium, Satz von Liouville, Liouvillezahlen, Satz von Roth, Satz von Lindemann-Weierstraß $\rightarrow$ Transzendenz von e und π

Z24: Kettenbrüche und quadratische Irrationalzahlen

KBE quadr. Irrationalzahlen, periodischer KB, Satz von Euler & Lagrange über periodische KBe, Satz von Galois zu reinperiodischen KBen, KBe von $\sqrt{m}$ und Palindrome

---

Z25: Pellsche Gleichung und KBE

Pellsche Gleichung, Grundeinheiten in $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, Schnelles Potenzieren, KBE von $\sqrt{m}$ und Pell-Lösungen, Berechnung der Minimallösungen

---

Ende der Vorlesung